Problemas de Métodos Numéricos

Miguel Alemán Flores, Luis Alvarez León y Javier Sánchez Pérez
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas
Campus de Tafira
35017 Las Palmas, España
Tfl: 45.87.10/08
Email: {maleman/lalvarez/jsanchez}@dis.ulpgc.es

Contents

INTRODUCCION.

El presente documento es el libro de problemas donde se encuentran resueltos todos los problemas presentes en el libro de Métodos Numéricos publicado por los mismos autores. Nunca se insistirá lo suficiente sobre la necesidad de hacer problemas para comprender correctamente cualquier teoría y sus aplicaciones. Además la manera de afrontar el estudio de los problemas debe ser bien distinta a la forma de estudiar teoría. Primero se debe intentar hacer los problemas sin mirar en absoluto la solución y después de reflexionar e intentar resolverlo de diferentes formas, muchas de las cuales nos llevarán a callejones sin salida, se mirará la solución. Es un hecho fácilmente constatable, que se aprende mucho más de un problema que no se ha conseguido resolver, pero al que se ha dedicado suficiente esfuerzo, que de un problema del cual se mira directamente la solución sin ninguna fase de reflexión previa. Además se tiende a olvidar con facilidad la técnica de resolución de un problema sobre el cual no se ha reflexionado suficientemente. De todo ello se deduce que el estudio correcto de los problemas de una asignatura va reñido con las prisas de última hora que suelen asaltar a los estudiantes cuando se acercan los exámenes, puesto que el esfuerzo de reflexión que requieren precisa de un trabajo diario y continuado, difícilmente compatible con las prisas de última hora. Resulta inquietante observar como en muchas ocasiones la realización de problemas se aborda bajo un espíritu de aprender rápidamente 4 técnicas básicas, que muchas veces ni se entienden, y a partir de ahí intentar reproducir esas técnicas, de forma absolutamente mecánica, en problemas análogos. El problema de esta actitud, es que aunque a corto plazo puede dar lugar a resultados positivos, aprobando asignaturas con un conocimiento mínimo e insuficiente, a la larga, tiene efectos catastróficos sobre la formación del alumno, a través de una disminución importante de la capacidad de razonamiento y del sentido crítico.

ARITMETICAS DE PRECISION FINITA Y FUENTES DE ERRORES NUMERICOS.

Problema 1 *Demostrar que al representar el número real* 0.1 *como*

$$0.1 = 2^e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

el número de elementos no-nulos a_n *es infinito.*

Solución: Supongamos que para algún t finito y e entero se tiene:

$$0.1 = 2^e \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{2^n}$$

despejando en esta igualdad obtenemos

$$2^{t-e} = 10 \sum_{n=1}^{t} a_n 2^{t-n}$$

ahora bien, como el número $m = \sum_{n=1}^{t} a_n 2^{t-n}$ es entero, de la desigualdad anterior obtenemos

$$2^{t-e} = 5 \cdot 2m$$

pero esta igualdad implica que el número 2^{t-e} es divisible por 5 lo cual es imposible.

Problema 2 *Representar el número* 0.0 703 125 *como*

$$0.0\,703\,125 = 2^e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Solución: En primer lugar tenemos que encontrar un entero e tal que

$$\frac{1}{2} \leq 0.0\,703\,125 \cdot 2^{-e} < 1$$

para $e = -3$ obtenemos

$$0.0\,703\,125 \cdot 2^3 = 0.\,562\,5$$

ahora tenemos que escribir el número 0.5625 como

$$0.5625 = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

los a_n se calculan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 0.5625 &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 0.75 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 0.5625 &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0.625 \Rightarrow a_3 = 0 \\ 0.5625 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} = 0.5625 \Rightarrow a_4 = 1 \end{aligned}$$

por tanto

$$0.0\,703\,125 = 2^{-3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}\right)$$

en términos binarios, este numero se escribiría con $e = -3$ y la mantisa viene dada por la secuencia $1, 0, 0, 1, 0, 0, ...$ (si no almacenamos el primer término a_1 porque siempre es 1, la mantisa sería $0, 0, 1, 0, 0, ...$)

Problema 3 ***(1 puntos)*** *Calcular los valores positivos mínimo y máximo que puede tomar un número real en una aritmética de precisión finita en función de t, $e_{\min}$ y $e_{\max}$.*

Solución: Los valores positivos mínimo y máximo son

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 2^{e_{\min}-1} \\ x_{\max} &= 2^{e_{\max}} \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{2^n} = 2^{e_{\max}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{t+1}}}{\frac{1}{2}} = 2^{e_{\max}}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \end{aligned}$$

Problema 4 *Calcular todos los números reales que se pueden construir tomando 5 bits de la forma siguiente: 1 bit para el signo, 2 bits para la mantisa (es decir $t = 3$, puesto que $a_1 = 1$ sólo se almacenan a_2 y a_3, y 2 bits para el exponente e, tomando como rango de $e = -1, 0, 1, 2$. Representar dichos números sobre una recta.*

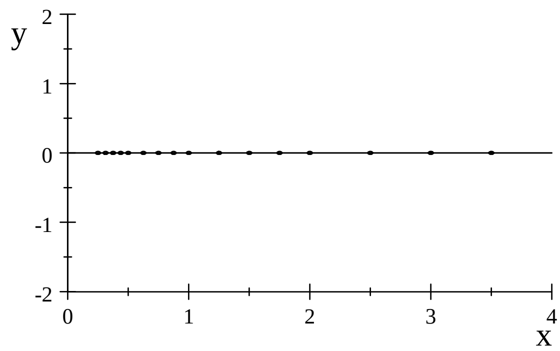
Solución: Los valores posibles positivos se representan en la siguiente tabla

$$\begin{array}{rl} e = -1 & \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \\ e = 0 & \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \\ e = 1 & 1, 1 + \frac{1}{2^2}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \\ e = 2 & 2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + 1, 2 + 1 + \frac{1}{2} \end{array}$$

los valores negativos son los mismos cambiados de signo. Simplificando las fracciones nos queda

$$\begin{array}{rl} e = -1 & 0.25, 0.3125, 0.375, 0.437\,5 \\ e = 0 & 0.5, 0.625, 0.75, 0.875 \\ e = 1 & 1, 1.25, 1.5, 1.75 \\ e = 2 & 2, 2.5, 3, 3.5 \end{array}$$

Si representamos los números positivos sobre una recta obtenemos



Problema 5 *Dada una aritmética de precisión finita cualquiera, calcular la distancia que hay entre el número 1 y su inmediato superior (es decir el número que va después de 1), y la distancia entre el número 1, y su inmediato inferior.*

Solución: El número 1 en una aritmética de precisión finita se escribe como

$$1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

el número inmediato superior a 1 en la aritmética es

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^t}\right) = 1 + \frac{1}{2^{t-1}}$$

y el número inmediato inferior a 1 viene dado por

$$\frac{1}{2} + .. + \frac{1}{2^t} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{t+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^t}$$

Problema 6 *Se considera una aritmética de 16 bits donde se dedican 1 bit al signo, 9 bits a la mantisa ($t = 10$) y 6 bits al exponente ($e_{\min} = -30$ $e_{\max} = 31$). Escribir, si es posible, los siguientes números en esta aritmética:*

1. 2, y los números más cercanos a 2 por arriba y por debajo. **Solución:**

$$2 = 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\mathrm{Si}\,guiente = 2^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{10}}\right)$$
$$Anterior = 2\left(\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2^i}\right) = 2\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}}\right)$$

2. El cero, el infinito y Na. **Solución:**

$$0 = 2^{-31}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\infty = 2^{32}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$NaN = 2^{32}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$$

3. Los números positivos más grande y más pequeño de la aritmética (teniendo en cuenta las excepciones) **Solución:**

$$Mayor = 2^{31}\left(\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2^i}\right) = 2^{31}\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$Menor = 2^{-31}\left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

4. $\frac{1}{9}$. **Solución:** No se puede escribir de forma exacta. Si suponemos

$$\frac{1}{9} = 2^e\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{2^i}\right) \Longrightarrow 1 = 9 \cdot 2^e \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{2^i}\right) \Longrightarrow$$
$$2^{t-e} = 3^2\left(\sum_{i=1}^{t} a_i 2^{t-i}\right) \Longrightarrow 2^{t-e} = 3^2 m$$

donde m es un número entero. Ahora bien esta igualdad es imposible porque resultaría que 3 divide a 2.

5. $2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{10}}\right)$. **Solución:**

$$2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2^{10}}\right) = 2^0\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{2^8} + \tfrac{1}{2^9}\right)$$

Problema 7 *Sean* $A = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right)$ $B = 2^3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}\right)$. *Calcular $B + A$ y $B - A$*

Solución:

$$B + A = 2^3\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4}\right)$$

1. $B - A = 2^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right)$

Problema 8 *Sean $e_{\min}$, $e_{\max}$, los valores mínimo y máximo del exponente e. Demostrar que si $e_{\min} < e < e_{\max}$, entonces los números:*

$$2^e\left(\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{2^n} \pm \frac{1}{2^t}\right)$$

pertenecen al conjunto A de números reales generados por la aritmética de precisión finita.

Solución: Que los números pertenecen a la aritmética significa que existe un conjunto de valores binarios a_i' y un entero e' tal que

$$2^e\left(\sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{2^n} \pm \frac{1}{2^t}\right) = 2^{e'} \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n'}{2^n}$$

Consideremos primero el caso de sumar $1/2^t$. Si $a_k = 1$ para todo k, entonces

$$2^e\left(\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^t}\right) = 2^{e+1}\frac{1}{2}$$

Si por el contrario existe un k_0 tal que $a_{k_0} = 0$, y tal que $a_k = 1$ para todo $k_0 < k \leq t$ entonces basta tomar $a_k' = a_k$ si $1 \leq k < k_0$, $a_{k_0}' = 1$ y $a_k' = 0$ si $k_0 < k \leq t$

Consideremos ahora el caso de restar $1/2^t$. Si el único elemento a_k distinto de 0 es a_1, entonces

$$2^e\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^t}\right) = 2^{e-1}\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{2^n}$$

Si por el contrario existe un $k_0 > 1$ tal que $a_{k_0} = 1$, y tal que $a_k = 0$ para todo $k_0 < k \leq t$ entonces basta tomar $a_k' = a_k$ si $1 \leq k < k_0$, $a_{k_0}' = 0$ y $a_k' = 1$ si $k_0 < k \leq t$.

Problema 9 *Dado un número $\tilde{z} = 2^e \sum_{n=1}^{t} \frac{a_n}{2^n}$, en una aritmética de precisión finita. Calcular el número inmediatamente inferior y superior a él en dicha aritmética.*

Solución: Si el número es de la forma

$$\tilde{z} = 2^e \frac{1}{2}$$

entonces el inmediato superior es

$$\tilde{z} + 2^e \frac{1}{2^t}$$

y el inmediato inferior es

$$2^{e-1}\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{2^n}$$

para cualquier otro número $\widetilde{z}$, el inmediato superior e inferior son

$$\widetilde{z} \pm 2^e \frac{1}{2^t}$$

Problema 10 ***(1 puntos)*** *Calcular las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 0.01$ evitando los errores de cancelación.*

Solución:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 0.04}}{2} = 1.995$$
$$x_2 = \frac{0.01}{1.995}$$

Problema 11 *Escribir el pseudocódigo para implementar el cálculo de las raíces reales de $ax^2+bx+c = 0$ evitando los errores de cancelación y teniendo en cuenta las diferentes opciones que aparecen cuando $a \neq 0$ y $a = 0$.*

Solución:

```
Algoritmo Calculo raiz polinomio ax^2 + bx + c = 0
variables reales a,b,c
leer(a,b,c)
si (a==0 ) entonces
  si (b==0 ) entonces
    PRINT 'EL POLINOMIO ES CONSTANTE'
    parar
  finsi
  PRINT 'EL POLINOMIO ES DE GRADO 1.'
  PRINT 'LA RAIZ ES ',-c/b
  parar
finsi
d=b*b-4*a*c
si (d< 0 ) entonces
  PRINT EL POLINOMIO NO TIENE RAICES REALES
  parar
finsi
si (b> 0) entonces
  x1=(-b-SQRT(d))/(2*a)
además
  x1=(-b+SQRT(d)/(2*a)
finsi
x2=c/(x1*a)
PRINT *,'LAS RAICES SON: ',x1,x2
fin algoritmo
```

CALCULO DE CEROS DE UNA FUNCION

Problema 12 *Calcular 2 iteraciones del algoritmo de la bisección para buscar un cero de la función $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-2, 0]$*

Solución:

$$\begin{aligned} x &= \frac{0 + (-2)}{2} = -1 \\ &f(-2) > 0,\ f(0) < 0,\ f(-1) < 0 \\ Nuevo\ Intervalo &= [-2, -1] \\ x &= \frac{-1 + (-2)}{2} = -1.5 \\ &f(-2) > 0,\ f(-1) < 0,\ f(-1.5) > 0 \\ Nuevo\ Intervalo &= [-1.5, -1] \end{aligned}$$

Problema 13 *Escribir el pseudocódigo del algoritmo el método de la bisección*

Solución:

```
Algoritmo: Método de la bisección
variables reales x,a,b,tol
leer(a,b,tol)
si (a> b) entonces
  PRINT 'INTERVALO INCORRECTO'
  parar
finsi
si (F(a)*F(b)> 0) entonces
  PRINT 'NO HAY CAMBIO DE SIGNO EN EL INTERVALO'
  parar
finsi
mientras (F(x)!=0 Y (b-a)>tol)
  x=(a+b)/2
  si((F(a)*F(x))<0) entonces
    b=x
  además
    A=X
  finsi
fin mientras
_PRINT 'LA RAIZ ES' x
fin algoritmo

real F(real x)
  real a⟵ cos(x) + x * x - 6
  devolver a
fin función
```

Problema 14 *Calcular 2 iteraciones del algoritmo de la regula-falsi para buscar un cero de la función $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[0, 2]$*

Solución:

$$x = 0 - \frac{2}{f(2)-f(0)} f(0) = 1$$
$$f(2) > 0,\ f(0) < 0,\ f(1) < 0$$
$$Nuevo\ Intervalo\ =\ [1,2]$$
$$x = 1 - \frac{1}{f(2)-f(1)} f(1) = \frac{4}{3}$$
$$f(2) > 0,\ f(1) < 0,\ f(\frac{4}{3}) < 0$$
$$Nuevo\ Intervalo\ =\ [\frac{4}{3},2]$$

Problema 15 *Escribir el pseudocódigo del algoritmo del método de la Regula-falsi*

Solución:

Algoritmo: Método de la Regula-falsi
variables reales x,a,b,tol
leer(a,b,tol)
si (a> b) **entonces**
PRINT 'INTERVALO INCORRECTO'
parar
finsi
si (F(a)*F(b)> 0) **entonces**
PRINT 'NO HAY CAMBIO DE SIGNO EN EL INTERVALO'
parar
finsi
mientras (F(x)!=0 Y (b-a)>tol)
x=a-F(a)*(b-a)/(F(b)-F(a))
si((F(a)*F(x))<0) **entonces**
b=x
además
a=x
finsi
fin mientras
_PRINT 'LA RAIZ ES' x
fin algoritmo

Problema 16 *Calcular una iteración del método de Newton-Raphson para calcular un cero de la función $f(x) = x^3 - 3$ partiendo de $x_0 = 1$.*

Solución:

$$x_1 = 1 - \frac{-2}{3} = \frac{5}{3}$$

Problema 17 ***(1 punto*** *Calcular una iteración del método de la secante para calcular un cero de la función $f(x) = x^3 - 3$ partiendo de $x_0 = 0$, $x_1 = 1$*

Solución:

$$x_1 = 1 - \frac{-2}{\left(\frac{-2-(-3)}{1-0}\right)} = 3$$

Problema 18 *Escribir pseudocódigo del algoritmo del método de la Secante utilizando reales de doble precisión. Los datos de entrada son las aproximaciones iniciales $x0$, y $x1$, El número máximo de iteraciones $N\max$, y la tolerancia TOL para determinar la igualdad de dos números.*

Solución:

Algoritmo: Método de la secante
variables reales x0,x1,x2,tol
variable entera Nmax
leer(a,b,tol,Nmax)
si (x0==x1) **entonces**
PRINT 'LAS DOS APROXIMACIONES INICIALES COINCIDEN'
parar
finsi
para k$\longleftarrow$ 1 **hasta** Nmax **hacer**
si(ABS(x1-x0)< tol) **entonces**
PRINT *,'LA RAIZ DE LA FUNCION ES: ',x1
parar
finsi
si(F(x1)==F(x0)) **entonces**
PRINT *,'METODO NO CONVERGE'
parar
finsi
x2=x1-F(x1)*(x1-x0)/(F(x1)-F(x0))
x0=x1
x1=x2
fin para
PRINT *,'NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES EXCEDIDO'
fin algoritmo

Problema 19 *Calcular una iteración del método de Muller para calcular un cero de la función $f(x) = x^3 - 3$ partiendo de $x_0 = 1$ (Calculando las derivadas de la función de forma exacta) y quedándonos con la raíz más cercana a x_0.*

Solución:

$$-2 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 = 0$$

$$x_1 = 1 + \frac{-3+\sqrt{33}}{6}$$

Problema 20 *Dado el polinomio $P(x) = 2x^3+3x^2+4x+5$. Evaluar el polinomio y su derivada en el punto $x = 2$, utilizando el algoritmo de Horner*

Solución:

$$\begin{aligned} P(x) &= ((2x+3)x+4)x+5 \\ P(2) &= ((7)2+4)2+5 \\ P(2) &= (18)2+5 = 41 \\ P'(x) &= (2x+7)x+18 \\ P'(2) &= (4+7)2+18 = 40 \end{aligned}$$

Problema 21 *Calcular el número máximo de raíces positivas y negativas del polinomio $x^5-35x^3+30x^2+124x-120$, y localizarlas en un intervalo.*

Solución: Teniendo en cuenta que

$$1+\frac{\max_{k=0,..,n-1}\mid a_k\mid}{\mid a_n\mid}=125$$

las raíces del polinomio están en el intervalo $[-125,125]$. Para calcular el número máximo de raíces positivas miramos los cambios de signo de los coeficientes, en este caso los signos son:

$$+-++-$$

por tanto el número de raíces positivas es 1 ó 3. Para estimar el número de raíces negativas cambiamos x por $-x$ y miramos los signos de los coeficientes que en este caso son:

$$-++--$$

por tanto el número de raíces negativas son 0 ó 2.

Problema 22 *Aislar en intervalos las raíces del polinomio $P(x)=20x^3-45x^2+30x-1$.*

Solución: Teniendo en cuenta que en este caso

$$1+\frac{\max_{k=0,..,n-1}\mid a_k\mid}{\mid a_n\mid}=1+\frac{45}{20}=\frac{65}{20}$$

todas las raíces están en el intervalo $[-\frac{65}{20},\frac{65}{20}]$. Para aislar las raíces calculamos los ceros de la derivada $P'(x)=60x^2-90x+30$, dichas raíces son 1 y 1/2. Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} P(-\frac{65}{20}) &= -1260.4 \\ P(\frac{1}{2}) &= \frac{21}{4} \\ P(1) &= 4 \\ P(\frac{65}{20}) &= 307.75 \end{aligned}$$

por tanto hay una única raíz en el intervalo $[-\frac{65}{20},\frac{1}{2}]$.

Problema 23 *Aislar en intervalos las raíces del polinomio $P(x)=2x^3+3x^2-12x+1$*

Solución:

$$P'(x)=6x^2+6x-12 \qquad \textit{raíces } x=1,-2$$

$$\textit{Intervalo Inicial } [-7,7]$$
$$P(-7)=-454\ P(-2)=21\ P(1)=-6\ P(7)=750.$$

Intervalos donde están las raíces:

[-7,-2] [-2,1] [1,7]

INTERPOLACION DE FUNCIONES I

Problema 24 *Calcular el polinomio interpolador de Lagrange $P_3(x)$ de la función $f(x)=sen(x)$ en los puntos $0,\frac{\pi}{2},\pi$ y $\frac{3\pi}{2}$.*

Solución: Puesto que $sen(0)=sen(\pi)=0$ sólo necesitamos los polinomios base de Lagrange centrados en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} P_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{x\,(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)} \\ P_{\frac{3\pi}{2}}(x) &= \frac{x\,(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\pi\right)\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Por tanto el polinomio interpolador es

$$P(x)=P_{\frac{\pi}{2}}(x)-P_{\frac{3\pi}{2}}(x)$$

Problema 25 *Calcular la expresión del error interpolación al aproximar la función $f(x)=sen(x)$ en el intervalo $[0,2\pi]$ interpolando en los puntos $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$. y acotarlo superiormente.*

Solución: El error de interpolación viene dada por la expresión:

$$f(x)-P_N(x)=\frac{sen(\xi)}{4!}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$$

el valor máximo del $sen(\xi)$ es 1. Por otro lado el valor donde alcanza el máximo el polinomio del error en $[0,2\pi]$ es $x=2\pi$, por tanto la cota del error que obtenemos es

$$|f(x)-P_N(x)|\leq\frac{1}{4!}2\pi\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi-\pi)\left(2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Problema 26 *Calcular el error máximo de interpolación en el intervalo $[0,1]$ al interpolar la función $\cos(x)$ en los puntos dados por los polinomios de Chebyshev tomando $N=5$.*

Solución: Según las fórmulas vistas en teoría el error viene dado por la expresión:

$$| f(x) - P_N(x) | \leq \frac{\max_{x \in [a,b]} \left| f^{N+1)}(\xi) \right|}{(N+1)!2^N} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{N+1}$$

en nuestro caso como $N = 5$ y la derivada sexta de $\cos(x)$ es $-\cos(x)$ cuyo máximo en valor absoluto es 1, obtenemos

$$| f(x) - P_N(x) | \leq \frac{1}{6!2^5} \left(\frac{1}{2} \right)^6 = 6.78 \times 10^{-7}$$

Problema 27 *Interpolar la función* $f(x) = \frac{10}{x^2+1}$ *en los puntos* $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ *utilizando las diferencias de Newton y evaluar el polinomio en* $x = 0$ *utilizando el algoritmo de Horner.*

Solución:

$$\begin{array}{llll}
-2 \to 2 & & & \\
 & 3 & & \\
-1 \to 5 & & -1 & \\
 & 0 & & 0 \\
1 \to 5 & & -1 & \\
 & -3 & & \\
2 \to 2 & & &
\end{array}$$

$P(x) = 2 + 3(x+2) - 1(x+2)(x+1) + 0(x+2)(x+1)(x-1) = (-1(x+1)+3)(x+2)+2$

$P(0) = (-1(0+1)+3)(0+2)+2 = 6$

Nota: *Quitar paréntesis en P(x) y aplicar Horner sobre el polinomio resultante no es lo que pide el problema y por lo tanto está mal*

Problema 28 *Calcular el polinomio interpolador de Lagrange* $P_3(x)$ *de la función* $f(x) = sen(x)$ *en los puntos* $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ *y* $\frac{3\pi}{2}$ *utilizando las diferencias divididas de Newton.*

Solución: Las diferencias divididas son: $f[0] = 0$, $f[\frac{\pi}{2}] = 1$, $f[\pi] = 0$, $f[\frac{3\pi}{2}] = -1$,

$$\begin{aligned}
f[0, \frac{\pi}{2}] &= \frac{2}{\pi} \\
f[\frac{\pi}{2}, \pi] &= -\frac{2}{\pi} \\
f[\pi, \frac{3\pi}{2}] &= -\frac{2}{\pi} \\
f[0, \frac{\pi}{2}, \pi] &= -\frac{4}{\pi^2} \\
f[\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}] &= 0 \\
f[0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}] &= \frac{8}{3\pi^3}
\end{aligned}$$

por tanto, el polinomio interpolador es

$$P(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{3\pi^3}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)$$

Problema 29 *Calcular el polinomio interpolador de Lagrange* $P_3(x)$ *de la función* $f(x) = 2^x$ *en los puntos* $0, 1, 3, 4$ *utilizando las diferencias divididas de Newton. Expresar el polinomio tomando en primer lugar* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ *y* $x_3 = 4$, *y en segundo lugar* $x_0 = 4$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, *y* $x_3 = 0$.

Solución: En el primer caso, las diferencias divididas son $f[x_0] = 1$, $f[x_1] = 2$, $f[x_2] = 8$, $f[x_3] = 16$.

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= 1 \\
f[x_1, x_2] &= 3 \\
f[x_2, x_3] &= 8 \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{2}{3} \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{5}{3} \\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

y el polinomio interpolador es:

$$P(x) = 1 + x + \frac{2}{3}x(x-1) + \frac{1}{4}x(x-1)(x-3)$$

Si tomamos ahora los puntos en orden inverso: $f[x_0] = 16$, $f[x_1] = 8$, $f[x_2] = 2$, $f[x_3] = 1$.

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= 8 \\
f[x_1, x_2] &= 3 \\
f[x_2, x_3] &= 1 \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{5}{3} \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{2}{3} \\
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

El polinomio interpolador es:

$$P(x) = 16 + 8(x-4) + \frac{5}{3}(x-4)(x-3) + \frac{1}{4}(x-4)(x-3)(x-1)$$

como puede observarse, al cambiar el orden de los puntos de interpolación, el polinomio de Lagrange expresado a través de las diferencias divididas cambia totalmente, salvo el último coeficiente $\frac{1}{4}$ que es el mismo en ámbos casos pues como se había demostrado en teoría el valor de $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ no depende del orden en que se toman los puntos de interpolación.

Problema 30 *Dada una función* $f(x)$, *y una secuencia de valores* x_n, *aproximar* $f(x)$ *por la parábola que pasa por los puntos* $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ *y* $(x_{n-3}, f(x_{n-3}))$, *calcular posteriormente las derivadas del polinomio, y comprobar que coinciden con las fórmulas dadas en el método de Muller para el cálculo de las derivadas* $f''(x_{n-1})$ *y* $f'(x_{n-1})$.

Solución: Si utilizamos las diferencias divididas para interpolar obtenemos $f[x_{n-1}] = f(x_{n-1})$

$$f[x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$
$$f[x_{n-2}, x_{n-3}] = \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})}{x_{n-2} - x_{n-3}}$$
$$f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}] = \frac{f[x_{n-1}, x_{n-2}] - f[x_{n-2}, x_{n-3}]}{x_{n-1} - x_{n-3}}$$

El polinomio interpolador es

$$P(x) = f(x_{n-1}) + f[x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_{n-1}) + f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}](x - x_{n-1})(x - x_{n-2})$$

por tanto

$P''(x_{n-1}) = 2f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}]$
$P'(x_{n-1}) = f[x_{n-1}, x_{n-2}] + f[x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}](x_{n-1} - x_{n-2})$

que corresponde a las fórmulas utilizadas por el método de Muller.

Problema 31 *Aproximar la función $sen(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ utilizando el desarrollo de Taylor, y calcular el valor de n a partir del cual la aproximación es la mejor posible dentro de una aritmética de 32 bits.*

Solución: El desarrollo de Taylor en 0 del $sen(x)$ viene dado por:

$$sen(x) \approxeq P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y el error máximo cometido por el desarrollo de Taylor en un punto $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ es

$$| P_n(x) - sen(x) | \leq sen(\frac{\pi}{4}) \frac{(x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

donde $\xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Para que la aproximación sea la mejor dentro de una aritmética de 32 bits tiene que cumplirse

$$\frac{| P_n(x) - sen(x) |}{sen(x)} \leq 2^{-24} = 5.96 \times 10^{-8}$$

por otro lado, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ se verifica

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} x \leq sen(x)$$

por tanto:

$$\frac{| P_n(x) - sen(x) |}{sen(x)} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

para $n = 4$ se tiene que

$$\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} = 2.46 \times 10^{-8}$$

por tanto $n = 4$ determina la mejor aproximación en una aritmética de 32 bits.

Problema 32 *Demostrar que utilizando relaciones trigonométricas es posible calcular las funciones $sen(x)$ y $\cos(x)$ para cualquier x (en radianes), utilizando únicamente su valor en el intervalo $[0, \frac{\pi}{8}]$.*

Solución: En teoría se demostró como se pueden definir el $sen(x)$ y $\cos(x)$ para cualquier valor de x a partir de su definición en $[0, \frac{\pi}{4}]$, por tanto, en este problema sólo tenemos que definir las funciones trigonométricas en $[0, \frac{\pi}{4}]$ a partir de su definición en $[0, \frac{\pi}{8}]$. Basta tener en cuenta las relaciones:

$$\cos_{[0,\frac{\pi}{4}]}(x) = \begin{cases} \cos_{[0,\frac{\pi}{8}]}(x) & si \quad x \leq \frac{\pi}{8} \\ \cos^2_{[0,\frac{\pi}{8}]}\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2_{[0,\frac{\pi}{8}]}\left(\frac{x}{2}\right) & si \quad x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$sen_{[0,\frac{\pi}{4}]}(x) = \begin{cases} sen_{[0,\frac{\pi}{8}]}(x) & si \quad x \leq \frac{\pi}{8} \\ 2\cos_{[0,\frac{\pi}{8}]}\left(\frac{x}{2}\right)\sin_{[0,\frac{\pi}{8}]}\left(\frac{x}{2}\right) & si \quad x > \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

Problema 33 *Calcular los polinomios necesarios para interpolar las funciones trigonométricas $\cos(x)$ y $sen(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{8}]$ en una aritmética de 32 bits*

Solución: En primer lugar, la función $\cos(x)$ la desarrollamos por serie de Taylor como

$$\cos(x) \approxeq P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

y el error máximo cometido por el desarrollo de Taylor en un punto $x \in [0, \frac{\pi}{8}]$ es

$$| P_n(x) - \cos(x) | \leq sen(\frac{\pi}{8}) \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donde $\xi \in [0, \frac{\pi}{8}]$. Para que la aproximación sea la mejor dentro de una aritmética de 32 bits tiene que cumplirse

$$\frac{| P_n(x) - \cos(x) |}{\cos(x)} \leq 2^{-24} = 5.96 \times 10^{-8}$$

por tanto:

$$\frac{| P_n(x) - \cos(x) |}{\cos(x)} \leq \tan(\frac{\pi}{8}) \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para $n = 3$ se tiene que

$$\tan(\frac{\pi}{8}) \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1.18 \times 10^{-7}$$

con lo cual ya estamos muy cerca de la precisión óptima. Para $n = 4$

$$\tan(\frac{\pi}{8}) \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2.53 \times 10^{-10}$$

por tanto $n = 4$ determina la mejor aproximación en una aritmética de 32 bits.

Análogamente, para la función $sen(x)$ tenemos

$$sen(x) \approxeq P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

y el error máximo cometido por el desarrollo de Taylor en un punto $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ es

$$| P_n(x) - sen(x) | \leq sen(\frac{\pi}{8}) \frac{(x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

donde $\xi \in [0, \frac{\pi}{8}]$. Para que la aproximación sea la mejor dentro de una aritmética de 32 bits tiene que cumplirse

$$\frac{| P_n(x) - sen(x) |}{sen(x)} \leq 2^{-24} = 5.96 \times 10^{-8}$$

por otro lado, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{8}]$ se verifica

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\frac{\pi}{8}} x \leq sen(x)$$

por tanto:

$$\frac{| P_n(x) - sen(x) |}{sen(x)} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

para $n = 3$ se tiene que

$$\frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} = 1.402\,679\,863 \times 10^{-8}$$

por tanto $n = 3$ determina la mejor aproximación en una aritmética de 32 bits.

Problema 34 ***(1 puntos)*** *Como se puede obtener la función y^x, donde x, y son números reales, utilizando las funciones e^x y $\ln(x)$.*

Solución: Se utiliza la equivalencia

$$y^x = e^{x \ln y}$$

ANALISIS NUMERICO MATRICIAL I

Problema 35 *Calcular el número de operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) en función de la dimensión N necesarias para realizar un remonte para resolver un sistema $A'u = b'$ donde A' es una matriz triangular superior.*

Solución: Escribimos la matriz A' de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

En el remonte se empiezan a calcular los u_i de abajo hacia arriba. Las operaciones que se realizan vienen dadas por:

$u_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

$u_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} u_n}{a_{n-1,n-1}}$

$u_{n-2} = \frac{b_{n-2} - (a_{n-2,n} u_n + a_{n-2,n-1} u_{n-1})}{a_{n-2,n-2}}$

$u_{n-3} = \frac{b_{n-3} - (a_{n-3,n} u_n + a_{n-3,n-1} u_{n-1} + a_{n-3,n-2} u_{n-2})}{a_{n-3,n-3}}$

$\vdots$

En la siguiente tabla se muestra el número de operaciones que se realizan en cada iteración:

Sumas	*Multiplic.*	*Divisiones*	*Total*
$n-1$	$n-1$	1	$2n-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	3	1	7
2	2	1	5
1	1	1	3
0	0	1	1

A partir de esta tabla podemos calcular el total de operaciones sumando por columnas:

$Sumas = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$

$Multiplicac. = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$

$Divisiones = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$

$\textbf{Total} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 =$

$= Sumas + Multiplicac. + Divisiones =$

$= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$

El orden del algoritmo es entonces $\mathcal{O}(n^2)$.

Problema 36 *Resolver por el método de Gauss el sistema* $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución:
$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{3}{2}y = y \rightarrow y = 2 \rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$

Problema 37 *Calcular el número de operaciones básicas necesarias para descomponer el sistema $Au = b$ en el sistema $A'u = b'$ utilizando el método de Gauss, y teniendo en cuenta la siguiente relación*

$$\sum_{k=1}^{M-1} k^2 = \frac{1}{3}M^3 - \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

En cada iteración se realizan las siguientes **operaciones**:

Para cada iteración (i):

Para cada fila (j)

$* \left(\frac{a_{ii}}{a_{ii}}\right)$

$* a_{j1} - a_{i1}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right) \ldots a_{jn} - a_{in}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$

En la primera iteración, este proceso se repite $N-1$ veces (para las $N-1$ j-filas inferiores). En la segunda, se repite $N-2$ veces, y así sucesivamente hasta la penúltima fila, en donde sólo se realiza una vez.

Iteración	Fila	Division.	Multiplic.	Sumas
1^a	2^a	1	n	n
	3^a	1	n	n
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n^a	1	n	n
2^a	3^a	1	$n-1$	$n-1$
	4^a	1	$n-1$	$n-1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n^a	1	$n-1$	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)^a$	n^a	1	2	2

A continuación obtenemos el total de operaciones en cada iteración sumando por columnas:

1^a Iteración:

$Divisiones = 1 + 1 + \ldots + 1 = n - 1$

$Multiplicac. = n + n + \ldots + n = n(n-1)$

$Sumas = n + n + \ldots + n = n(n-1)$

2^a Iteración:

$Divisiones = 1 + 1 + \ldots + 1 = n - 2$

$Multiplicac. = (n-1) + (n-1) + \ldots + (n-1) =$

$=(n-1)(n-2)$

$Sumas = (n-1)+(n-1)+\ldots+(n-1) = (n-1)(n-2)$

$\vdots$

(n-1)^a Iteración:

$Divisiones = 1$

$Multiplicac. = 2$

$Sumas = 2$

Total operaciones[1]:

$Divisiones = (n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$Multiplicac. = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 =$

$=((n-1)+1)(n-1)+((n-2)+1)(n-2)+\ldots =$

$=(n-1)^2 + (n-1) + (n-2)^2 + (n-2) + \ldots =$

$=\frac{2n^3-3n^2+n}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^3-n}{3}$

$Sumas = n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 = \frac{n^3-n}{3}$

Total$=Sumas + Multiplicac. + Divisiones =$

$= \frac{n^3-n}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$

El orden del algoritmo es entonces $\mathcal{O}(\frac{2n^3}{3})$.

Problema 38 *Escribir el pseudocódigo del algoritmo de la funcion $IDESCENSO(A, b, u,$ N$)$ que resuelve un sistema donde A es una matriz triangular inferior, b es el vector de términos independientes, u el vector solución, N es la dimensión del sistema La función devuelve* 0 *si termina correctamente y* 1 *en caso contrario.* ***Nota Importante:*** *Las líneas de código tienen que ir todas numeradas y no pueden superar las* 12 *lineas de instrucciones como máximo.*

Solución:

01 $IDESCENSO$(matriz real A,vector real b,vector real u,entero N)
02 **para variable entera** $I \leftarrow 0$ **hasta** N-1 **hacer**
03 **si**$(A(I,I) == 0)$ **entonces**
04 **devolver** 1
05 **finsi**
06 $u(I) = b(I)$
07 **para variable entera** $J \leftarrow 0$ **hasta** $I-1$ **hacer**
08 $u(I) = u(I) - A(I,J) * u(J)$

[1] $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$

```
    fin mientras
    u(I) = u(I)/A(I,I)
fin mientras
devolver 0
```

Problema 39 *Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Pasos en la descomposición por Gauss:

1. Intercambiamos la tercera fila con la primera:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[pivoteo]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Hacemos ceros en la primera columna $\left(fila_j - fila_1 \cdot \frac{a_{j1}}{a_{11}}; j > 1\right)$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[ceros]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Hacemos ceros en la segunda columna $\left(fila_j - fila_2 \cdot \frac{a_{j1}}{a_{11}}; j > 2\right)$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[ceros]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Realizamos el remonte, y obtenemos como solución:

$u_3 = \frac{4}{4} = 1$

$u_2 = \frac{1-2u_3}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

$u_1 = \frac{1+u_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Problema 40 *Demostrar que si $A = B \cdot B^t$ (B triangular inferior) y $|B| \neq 0$, entonces A es simétrica y definida positiva*

Solución: Tenemos que demostrar, por una parte, que $A^t = A$ (A simétrica) y, por otra, que $\bar{x}^t A \bar{x} > 0$ (A definida positiva[2]).

1. Simétrica:
$$A^t = \left(B \cdot B^t\right)^t = \left(B \cdot B^t\right)^t = \left(B^t\right)^t B^t = B \cdot B^t = A$$

2. Definida positiva:
Como $|B| \neq 0$, si $B\bar{x} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = 0$

Una matriz se dice definida positiva si se cumple que

$\forall \bar{x} \neq 0, \bar{x}^t A \bar{x} > 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \bar{x}^t A \bar{x} = \bar{x}^t B B^t \bar{x} = \left(B^t \bar{x}\right) B^t \bar{x} =$

$= \bar{y}^t \bar{y} = \sum y_i^2 > 0$

[2] Matriz definida positiva: $\forall \bar{x} \neq 0 \Longrightarrow \bar{x}^t A \bar{x} > 0$.
Esta es la definición formal. De forma práctica, se comprueba que los menores principales de la matriz sean positivos. También se cumple si todos sus autovalores son positivos: $\bar{x}^t A \bar{x} = \bar{x}^t \lambda \bar{x} = \lambda \bar{x}^t \bar{x} > 0$.

Problema 41 *Descomponer la siguiente matriz A por el método de Cholesky*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 26 \end{pmatrix}$$

Solución: La descomposición por el método de Cholesky tiene la forma siguiente:

$$A = B \cdot B^t,$$

donde la matriz B es triangular inferior.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

Cálculo de los elementos de la matriz B :

$A = B \cdot B^t =$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{11}b_{21} & b_{21}^2 + b_{22}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{11}b_{31} & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Igualamos los elementos de la matriz anterior con los elementos de la matriz A y se obtienen los siguientes resultados:

$b_{11}^2 = 1$

$b_{11} = 1$

$b_{11}b_{21} = 1$

$b_{21} = \frac{1}{b_{11}} = 1$

$b_{11}b_{31} = 4$

$b_{31} = \frac{4}{b_{11}} = 4$

$b_{21}^2 + b_{22}^2 = 5$

$b_{22} = \pm\sqrt{(5 - b_{21}^2)} = \sqrt{(4)} = 2$

$b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32}$=6

$b_{32} = \frac{6-b_{21}b_{31}}{b_{22}} = \frac{6-4}{2} = 1$

$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 26$

$b_{33} = \sqrt{(26 - b_{31}^2 - b_{32}^2)} = \sqrt{(26 - 16 - 1^2)} = 3$

La descomposición queda de la siguiente manera:

$A = B \cdot B^t =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 42 *Calcular el número de operaciones necesarias para resolver un sistema por el método de Cholesky.*

Solución: Las **operaciones** que se realizan en cada iteración vienen dadas por:

Iteración	*Operaciones*
$i = 1$	$j = 1 : b_{11} = \sqrt{a_{11}}$ $j = 2 : b_{21} = \frac{a_{21}}{b_{11}}$ $\vdots$ $j = n : b_{n1} = \frac{a_{n1}}{b_{11}}$
$i = 2$	$j = 2 : b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}$ $j = 3 : b_{32} = \frac{a_{32}-b_{21}b_{31}}{b_{22}}$ $\vdots$ $j = n : b_{n2} = \frac{a_{n2}-b_{21}b_{n1}}{b_{22}}$
$\vdots$	$\vdots$
$i = n$	$j = n : b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \left(b_{n1}^2 + \ldots + b_{n,n-1}^2\right)}$

En la siguiente tabla se muestra de forma esquematizada, el **número de operaciones** en cada iteración:

Iteración	*Sumas*	*Multiplic.*	*Divisiones*
$i = 1$	0 0 $\vdots$ 0	0 0 $\vdots$ 0	0 1 $\vdots$ $\underbrace{1}_{n-1}$
$i = 2$	1 1 $\vdots$ $\underbrace{1}_{n-1}$	1 1 $\vdots$ $\underbrace{1}_{n-1}$	0 1 $\vdots$ $\underbrace{1}_{n-2}$
$i = 3$	2 2 $\vdots$ $\underbrace{2}_{2(n-2)}$	2 2 $\vdots$ $\underbrace{2}_{2(n-2)}$	0 1 $\vdots$ $\underbrace{1}_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i = n$	$n - 1$	$n - 1$	0

El total de operaciones se obtiene sumando los totales parciales de la tabla anterior:

$Sumas = Multiplicac. =$

$= (n-1) + 2\,(n-2) + 3(n-3) + \ldots + (n-1) =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{n^3-n}{6}$

$Divisiones = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

El resultado final es:

Total=$Sumas + Multiplicac. + Divisiones =$

$= 2\frac{n^3-n}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}n^2$

El orden del algoritmo es $\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{3}\right)$

Problema 43 *Demostrar que a partir de un método para resolver sistemas de ecuaciones se puede construir de forma inmediata un método para calcular la inversa A^{-1} de una matriz A.*

Solución:

$$AA^{-1} = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si expresamos la matriz inversa de la siguiente manera:

$$A\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

se pueden calcular las columnas de esa matriz a partir de N sistemas de ecuaciones de la siguiente forma:

$$A\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ c.q.d.}$$

Problema 44 *Demostrar el algoritmo de Crout para descomponer matrices tridiagonales.*

Solución: Consideremos la matriz tridiagonal siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

La descomposición por el método de Crout genera dos matrices de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & . & 0 \\ m_1 & l_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & m_{n-1} & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & . & . & u_{n-1} \\ 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} l_1 & l_1u_1 & 0 & . & 0 \\ m_1 & m_1u_1 + l_2 & l_2u_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & l_{n-1}u_{n-1} \\ 0 & 0 & . & m_{n-1} & m_{n-1}u_{n-1} + l_n \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices y despejando los elementos l_i, u_i y m_i,

$l_1u_1 = b_1$

$$\mathbf{l}_1 = a_1, \mathbf{u}_1 = \frac{b_1}{l_1}, \mathbf{m}_1 = c_1$$

$m_1u_1 + l_2 = a_2$

$l_2u_2 = b_2$

$$\mathbf{l}_2 = a_2 - m_1u_1, \mathbf{u}_2 = \frac{b_2}{l_2}, \mathbf{m}_2 = c_2$$

$\vdots$

$m_{n-2}u_{n-2} + l_{n-1} = a_{n-1}$

$l_{n-1}u_{n-1} = b_{n-1}$

$$\mathbf{l}_{n-1} = a_{n-1} - m_{n-2}u_{n-2}, \mathbf{u}_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{l_{n-1}}, \mathbf{m}_{n-1} = c_{n-1}$$

$m_{n-1}u_{n-1} + l_n = a_n$

$$\mathbf{l}_n = a_n - m_{n-1}u_{n-1}$$

El **algoritmo** queda de la siguiente manera:

$l_1 = a_1$
$u_1 = \frac{b_1}{l_1}$
Para i $= 2, \ldots, n-1$
  $m_{i-1} = c_{i-1}$
  $l_i = a_i - m_{i-1}u_{i-1}$
  $u_i = \frac{b_i}{l_i}$
Fin Para
$m_{n-1} = c_{n-1}$
$l_n = a_n - m_{n-1}u_{n-1}$

Problema 45 *Resolver utilizando el método de Crout el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: Aplicando el algoritmo del problema anterior, obtenemos los siguientes resultados:

i=1

$l_1 = 2$

$u_1 = \frac{4}{2} = 2$

i=2

$m_1 = -1$

$l_2 = 0 - 2(-1) = 2$

$u_2 = \frac{4}{2} = 2$

i=3

$m_2 = -1$

$l_3 = 0 - 2(-1) = 2$

Sustituyendo estos valores en las matrices de Crout, la descomposición queda:

$$A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema, se tiene en cuenta lo siguiente:

$$Ax = b$$

$$LUx = b \qquad (Ux = y)$$

y nos queda un sistema de la forma:

$$Ly = b$$

Calculamos el valor de y a partir del sistema anterior:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

aplicando un algoritmo de descenso,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{2} \\ \frac{3+y_1}{2} \\ \frac{-1+y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el vector x por remonte:

$$Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x_2 \\ 3-2x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quedándonos la solución final $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 46 *Calcular el número de operaciones necesarias para resolver un sistema tridiagonal por el método de Crout.*

Solución: Las **operaciones** que se realizan en cada iteración vienen dadas por:

Iteración	*Operaciones*
$i=1$	$l_1 = a_1; u_1 = \frac{b_1}{l_1}$
$i=2$	$m_1 = c_1; l_2 = a_2 - m_1 u_1; u_2 = \frac{b_2}{l_2}$
$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	$l_n = a_n - m_{n-1} u_{n-1}$

En la siguiente tabla se muestra el **número de operaciones** en cada iteración:

Iteración	*Sumas*	*Multiplic.*	*Divisiones*
$i=1$	0	0	1
$i=2$	1	1	1
$i=3$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	1	1	0

El total de operaciones se obtiene de la tabla anterior como:

$$Sumas = Multiplicac. = Divisiones =$$

$$= 1 + 1 + \ldots + 1 = (n-1)$$

Total=$Sumas + Multiplicac. + Divisiones =$

$$= 3(n-1)$$

El orden del algoritmo es $\mathcal{O}(3n)$

DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

Problema 47 *Calcular analíticamente y numéricamente la matriz gradiente en el punto* $(1,1)$ *(utilizar* $h = 0.1$*) de la función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \\ x - y \end{cases}$$

Solución:

Analíticamente
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Numéricamente, si llamamos $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ y $f_2(x,y) = x - y$, entonces aplicando las máscaras vistas en teoría tenemos

$$f_1(x,y) = x - y$$

$\frac{\partial f_1(1,1)}{\partial x} =$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_1(1+0.1, 1-0.1) - f_1(1-0.1, 1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_1(1+0.1, 1+0.1) - f_1(1-0.1, 1+0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(f_1(1+0.1, 1) - f_1(1-0.1, 1)\right) =$
$0.585\,79 + 0.585\,79 + 0.828\,43 = 2.0$

$\frac{\partial f_1(1,1)}{\partial y} =$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_1(1-0.1, 1+0.1) - f_1(1-0.1, 1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_1(1+0.1, 1+0.1) - f_1(1+0.1, 1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(f_1(1, 1+0.1) - f_1(1, 1-0.1)\right) =$

$0.585\,79 + 0.585\,79 + 0.828\,43 = 2.0$

De la misma forma, para $f_2(x,y)$ tenemos

$\frac{\partial f_2(1,1)}{\partial x} =$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_2(1+0.1,1-0.1) - f_2(1-0.1,1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_2(1+0.1,1+0.1) - f_2(1-0.1,1+0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(f_2(1+0.1,1) - f_2(1-0.1,1)\right) =$
$0.292\,89 + 0.292\,89 + 0.414\,21 = 1$

$\frac{\partial f_2(1,1)}{\partial y} =$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_2(1-0.1,1+0.1) - f_2(1-0.1,1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(f_2(1+0.1,1+0.1) - f_2(1+0.1,1-0.1)\right) +$
$\frac{1}{4(0.1)}2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(f_2(1,1+0.1) - f_2(1,1-0.1)\right) =$
$0.292\,89 + 0.292\,89 + 0.414\,21 = 1$

Con lo cual, en este caso la matriz gradiente calculada numéricamente coincide con la calculada analíticamente.

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 48 *Dados 3 puntos distintos x_l, x_i, x_r demostrar que la fórmula:*

$$f'(x_i) \approx \frac{(x_i - x_l)\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} + (x_r - x_i)\frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r - x_l}$$

aproxima la derivada de $f'(x_i)$ con un orden de aproximación de 2.

Solución: Evaluamos el desarrollo de Taylor de la función en los puntos x_r, x_l :

$$f(x_l) = f(x_i) + f'(x_i)(x_l - x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_l - x_i)^2 + \tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_l - x_i)^3$$
$$f(x_r) = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_r - x_i)^2 + \tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_r - x_i)^3$$

$$(x_r - x_i)\tfrac{f(x_l)-f(x_i)}{(x_l-x_i)} = (x_r - x_i)[f'(x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_l - x_i) + \tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_l - x_i)^2]$$
$$(x_i - x_l)\tfrac{f(x_i)-f(x_r)}{(x_i-x_r)} = (x_i - x_l)[f'(x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_r - x_i) + \tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_r - x_i)^2]$$

Sumamos las expresiones anteriores y nos queda:

$$(x_r - x_i)\tfrac{f(x_l)-f(x_i)}{(x_l-x_i)} + (x_i - x_l)\tfrac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} =$$
$$= (x_r - x_i)f'(x_i) + (x_i - x_l)f'(x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_i - x_l)(x_r - x_i) +$$
$$+\tfrac{f''(x_i)}{2!}(x_r - x_i)(x_l - x_i) +$$
$$+\tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_r - x_i)(x_l - x_i)^2 +$$
$$+\tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_i - x_l)(x_r - x_i)^2$$

Agrupamos por las derivadas de la función:

$$(x_r - x_i)\tfrac{f(x_l)-f(x_i)}{(x_l-x_i)} + (x_i - x_l)\tfrac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} =$$
$$= (x_r - x_l)f'(x_i) + \tfrac{f''(x_i)}{2!}\cdot 0 +$$
$$+\tfrac{f'''(x_i)}{3!}(x_r - x_i)(x_l - x_i)\left((x_l - x_i) - (x_r - x_i)\right)$$

El término de la tercera derivada nos da el orden de la fórmula:

$$(x_r - x_l)f'(x_i) = (x_r - x_i)\tfrac{f(x_l)-f(x_i)}{(x_l-x_i)} +$$
$$+(x_i - x_l)\tfrac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f'(x_i) \approx \frac{(x_i - x_l)\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} + (x_r - x_i)\frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r - x_l} + \mathcal{O}(h^2)$$

Problema 49 *Dados 3 puntos distintos x_l, x_i, x_r calcular el polinomio de Lagrange que interpola a $f(x)$ en esos 3 puntos, calcular la derivada de ese polinomio en x_i y comprobar que da la misma fórmula que la presentada en el problema anterior.*

Solución: El polinomio de Lagrange es:

$$f(x) = \tfrac{(x-x_r)(x-x_l)}{(x_i-x_r)(x_i-x_l)}f(x_i) + \tfrac{(x-x_i)(x-x_l)}{(x_r-x_i)(x_r-x_l)}f(x_r) +$$
$$+\tfrac{(x-x_i)(x-x_r)}{(x_l-x_i)(x_l-x_r)}f(x_l)$$

Derivamos la expresión anterior y obtenemos:

$$f'(x) = \tfrac{(x-x_l)+(x-x_r)}{(x_i-x_r)(x_i-x_l)}f(x_i) + \tfrac{(x-x_l)+(x-x_i)}{(x_r-x_i)(x_r-x_l)}f(x_r) +$$
$$+\tfrac{(x-x_r)+(x-x_i)}{(x_l-x_i)(x_l-x_r)}f(x_l)$$

Evaluamos la derivada en el punto x_i y desarrollamos hasta obtener el resultado:

$$f'(x_i) = \tfrac{(x_i-x_l)+(x_i-x_r)}{(x_i-x_r)(x_i-x_l)}f(x_i) +$$
$$+\tfrac{(x_i-x_l)+(x_i-x_i)}{(x_r-x_i)(x_r-x_l)}f(x_r) + \tfrac{(x_i-x_r)+(x_i-x_i)}{(x_l-x_i)(x_l-x_r)}f(x_l)$$

$$f'(x_i) = \tfrac{f(x_i)}{(x_i-x_r)} + \tfrac{f(x_i)}{(x_i-x_l)} + \tfrac{(x_i-x_l)f(x_r)}{(x_r-x_i)(x_r-x_l)} +$$
$$+\tfrac{(x_i-x_r)f(x_l)}{(x_l-x_i)(x_l-x_r)}$$

extraemos el factor $(x_r - x_l)$,

$$(x_r - x_l)\, f'(x_i) = \tfrac{(x_r-x_l)f(x_i)}{(x_i-x_r)} + \tfrac{(x_r-x_l)f(x_i)}{(x_i-x_l)} +$$

$+\frac{(x_i-x_l)f(x_r)}{(x_r-x_i)} - \frac{(x_i-x_r)f(x_l)}{(x_l-x_i)}$

$$(x_r - x_l)\, f'(x_i) = \frac{-x_r f(x_i)+x_l f(x_i)}{(x_r-x_i)} + \frac{x_r f(x_i)-x_l f(x_i)}{(x_i-x_l)} +$$

$$+\frac{(x_i-x_l)f(x_r)}{(x_r-x_i)} - \frac{(x_r-x_i)f(x_l)}{(x_i-x_l)}$$

agrupamos términos,

$$(x_r - x_l)\, f'(x_i) = \left(\frac{(x_i-x_l)f(x_r)}{(x_r-x_i)} - \frac{(x_i-x_l)f(x_i)}{(x_r-x_i)}\right) +$$

$$+\left(\frac{(x_r-x_i)f(x_i)}{(x_i-x_l)} - \frac{(x_r-x_i)f(x_l)}{(x_i-x_l)}\right) + \frac{x_i f(x_i)}{(x_r-x_i)}$$

$$-\frac{x_r f(x_i)}{(x_r-x_i)} + \frac{x_i f(x_i)}{(x_i-x_l)} - \frac{x_l f(x_i)}{(x_i-x_l)}$$

$$(x_r - x_l)\, f'(x_i) = \frac{(x_i-x_l)(f(x_r)-f(x_i))}{(x_r-x_i)} +$$

$$+\frac{(x_r-x_i)(f(x_i)-f(x_l))}{(x_i-x_l)} + \frac{x_i f(x_i)}{(x_r-x_i)} - \frac{x_r f(x_i)}{(x_r-x_i)} +$$

$$+\frac{x_i f(x_i)}{(x_i-x_l)} - \frac{x_l f(x_i)}{(x_i-x_l)}$$

$$(x_r - x_l)\, f'(x_i) = \frac{(x_i-x_l)(f(x_r)-f(x_i))}{(x_r-x_i)} +$$

$$+\frac{(x_r-x_i)(f(x_i)-f(x_l))}{(x_i-x_l)} +$$

$$+\frac{x_i f(x_i)(x_i-x_l) - x_r f(x_i)(x_i-x_l)}{(x_r-x_i)(x_i-x_l)} +$$

$$+\frac{x_i f(x_i)(x_r-x_i) - x_l f(x_i)(x_r-x_i)}{(x_r-x_i)(x_i-x_l)}$$

simplificando,

$$f'(x_i) = \frac{\frac{(x_i-x_l)(f(x_r)-f(x_i))}{(x_r-x_i)} + \frac{(x_r-x_i)(f(x_i)-f(x_l))}{(x_i-x_l)}}{(x_r-x_l)}$$

Problema 50 *Calcular una aproximación de la derivada tercera $f'''(x_i)$ de una función $f(x)$ en un punto x_i, utilizando $f(x_i)$, $f(x_i+h)$, $f(x_i-h)$, $f(x_i-2h)$*

Solución:
$a \to f(x_i+h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + O(h^4)$

1. $b \to f(x_i-h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + O(h^4)$
   $c \to f(x_i-2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) - \frac{4h^3}{3}f'''(x_i) + O(h^4)$

   Sistema: $\begin{pmatrix} a-b-2c=0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+2c=0 \\ \frac{a}{6}-\frac{b}{6}-\frac{4c}{3}=1 \end{pmatrix}$ Solución: $a = 1, b=3, c=-1$.

   $f'''(x_i) = \frac{af(x_i+h)+bf(x_i-h)+cf(x_i-2h)-(a+b+c)f(x_i)}{h^3} = \frac{f(x_i+h)+3f(x_i-h)-f(x_i-2h)-3f(x_i)}{h^3} + O(h)$

Problema 51 *Dados 3 puntos. Demostrar que la fórmula*

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}$$

aproxima la derivada segunda de $f(x)$ en x_i con un orden de aproximación de 1.

Solución: Desarrollo de Taylor de la función en el punto x_i y evaluación en x_r y x_l:

$$f(x_r) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_r-x_i) +$$

$$+\frac{f''(x_i)}{2!}(x_r-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_r-x_i)^3$$

$$f(x_l) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_l-x_i) +$$

$$+\frac{f''(x_i)}{2!}(x_l-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_l-x_i)^3$$

Extraemos en ambas ecuaciones:

$$\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} \approx f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_r-x_i) +$$

$$+\frac{f'''(x_i)}{3!}(x_r-x_i)^2$$

$$\frac{f(x_l)-f(x_i)}{(x_l-x_i)} \approx f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_l-x_i) +$$

$$+\frac{f'''(x_i)}{3!}(x_l-x_i)^2$$

Restamos las expresiones anteriores:

$$\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{(x_i-x_l)} \approx \frac{f''(x_i)}{2!}(x_r-x_l) +$$

$$+\frac{f'''(x_i)}{3!}\left((x_r-x_i)^2 - (x_l-x_i)^2\right)$$

Despejamos la segunda derivada y obtenemos:

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{(x_i-x_l)}}{x_r-x_l} -$$

$$-2\frac{\frac{f'''(x_r)}{3!}\left((x_r-x_i)^2-(x_l-x_i)^2\right)}{x_r-x_l}$$

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{(x_i-x_l)}}{x_r-x_l} + O(h)$$

Problema 52 *Considerar en el problema anterior que $x_l = x_i - h$, y $x_r = x_i + h$. Deducir como queda la fórmula anterior para aproximar la derivada segunda, y demostrar que en este caso el orden de aproximación es* 2.

Solución: Sustituyendo $x_l = x_i - h$, y $x_r = x_i + h$, tenemos:

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_i+h-x_i)} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{(x_i-x_i+h)}}{x_i+h-x_i+h} =$$

$$= \frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{f(x_r)-f(x_i)-f(x_i)-f(x_l)}{h^2} - \frac{f'''(x_i)}{3!}(h-h) + O(h^2) =$$

$$= \frac{f(x_r)-2f(x_i)-f(x_l)}{h^2} + O(h^2)$$

La aproximación de la segunda derivada queda de la forma,

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_r)-2f(x_i)-f(x_l)}{h^2}$$

Problema 53 *Dados 3 puntos $x_l < x_i < x_r$ calcular el polinomio de Lagrange que interpola a $f(x)$ en esos 3 puntos, calcular la derivada segunda de ese polinomio en x_i y comprobar que da la misma fórmula que utilizando los desarrollos de Taylor.*

Solución: Por las diferencias divididas de Newton obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{l} x_l \to f(x_l) \\ x_i \to f(x_i) \\ x_r \to f(x_r) \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l} \\ \frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} \end{array} \quad \frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}$$

Polinomio de Lagrange:

$$P(x) \simeq f(x_l) + \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}(x-x_l) +$$

$$+ \frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}(x-x_l)(x-x_i)$$

Derivamos el polinomio:

$$P'(x) \simeq \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l} + \frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}(x-x_l) +$$

$$+ \frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}(x-x_i)$$

Calculamos la segunda derivada, obteniendo:

$$P''(x) \simeq 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l}, \text{ c.q.d.}$$

Problema 54 *Calcular una aproximación de la derivada primera y segunda de una función $f(x)$ en $x=0$, teniendo en cuenta que $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(4)=9$*

Solución:

$$f'(x_i) \approx \frac{(x_i-x_l)\frac{f(x_r)-f(x_i)}{x_r-x_i} + (x_r-x_i)\frac{f(x_i)-f(x_l)}{x_i-x_l}}{x_r-x_l} =$$

$$= \frac{(0-1)\frac{f(4)-f(0)}{4-0} + (4-0)\frac{f(0)-f(1)}{0-1}}{4-1} =$$

$$= \frac{-\frac{9-1}{4} + 4\frac{1-0}{-1}}{3} = \frac{-2-4}{3}$$

$$= \frac{-6}{3} = -2$$

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{f(x_r)-f(x_i)}{(x_r-x_i)} - \frac{f(x_i)-f(x_l)}{(x_i-x_l)}}{x_r-x_l} =$$

$$= 2\frac{\frac{9-1}{(4-0)} - \frac{1-0}{(0-1)}}{4-1} = 2\frac{2+1}{3} = 2$$

Problema 55 *Demostrar, utilizando el desarrollo de Taylor, que las siguientes expresiones son discretizaciones del laplaciano:*

$$\Delta F = \frac{F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} - 4F_{i,j}}{2h^2}$$

$$\Delta F = \frac{F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 4F_{i,j}}{h^2}$$

Solución: A partir del desarrollo de Taylor de la función F, se obtiene lo siguiente:

$$F(x+h,y+h) = F(x,y) + hF_x + hF_y +$$

$$+\tfrac{1}{2}h^2(F_{xx} + 2F_{xy} + F_{yy})$$

$$F(x-h,y-h) = F(x,y) - hF_x - hF_y +$$

$$+\tfrac{1}{2}h^2(F_{xx} + 2F_{xy} + F_{yy})$$

$$F(x-h,y+h) = F(x,y) - hF_x + hF_y +$$

$$+\tfrac{1}{2}h^2(F_{xx} - 2F_{xy} + F_{yy})$$

$$F(x+h,y-h) = F(x,y) + hF_x - hF_y +$$

$$+\tfrac{1}{2}h^2(F_{xx} - 2F_{xy} + F_{yy})$$

Sumamos estas cuatro ecuaciones,

$$F(x+h,y+h) + F(x-h,y-h) + F(x-h,y+h) +$$

$$+F(x+h,y-h) = 4F(x,y) + 2h^2(F_{xx} + F_{yy})$$

$$F_{xx} + F_{yy} =$$

$$= \frac{F(x+h,y+h)+F(x-h,y-h)+F(x-h,y+h)+F(x+h,y-h)-4F(x,y)}{2h^2},$$

discretizando se obtiene el resultado esperado,

$$\Delta F = \frac{F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1} + F_{i+1,j-1} - 4F_{i,j}}{2h^2}$$

Para demostrar la segunda igualdad, tomamos las siguientes ecuaciones:

$$F(x+h,y) = F(x,y) + hF_x + \frac{h^2}{2}F_{xx}$$

$$F(x-h,y) = F(x,y) - hF_x + \frac{h^2}{2}F_{xx}$$

$$F(x,y+h) = F(x,y) + hF_y + \frac{h^2}{2}F_{yy}$$

$$F(x,y-h) = F(x,y) - hF_y + \frac{h^2}{2}F_{yy}$$

Sumamos estas expresiones y obtenemos:

$$F(x+h,y) + F(x-h,y) + F(x,y+h) +$$

$$+F(x,y-h) = 4F(x,y) + h^2F_{xx} + h^2F_{yy}$$

$$F_{xx} + F_{yy} =$$

$$\frac{F(x+h,y)+F(x-h,y)+F(x,y+h)+F(x,y-h)-4F(x,y)}{h^2},$$

discretizando

$$\Delta F = \frac{F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 4F_{i,j}}{h^2}$$

Problema 56 *Calcular una aproximación del laplaciano de una función $F(x,y)$ en el punto $(x,y) = (0,0)$ conociendo los siguientes valores:* $F(0,0) = 0$, $F(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}$, $F(-\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}$, $F(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $F(0,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Solución: Si representamos estos valores en una tabla, obtenemos lo siguiente:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

El valor de h es $\frac{1}{2}$.

Aproximamos el laplaciano promediando las dos expresiones del ejercicio anterior. Si no realizáramos este promediado, no se tendrían en cuenta todos los valores de la función.

$$\Delta F = \gamma \frac{F_{i+1,j+1}+F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1}+F_{i+1,j-1}-4F_{i,j}}{2h^2} +$$

$$+ (1-\gamma) \frac{F_{i+1,j}+F_{i-1,j}+F_{i,j+1}+F_{i,j-1}-4F_{i,j}}{h^2},$$

$$\gamma = \frac{2}{3}$$

$$\Delta F(0,0) = \frac{2}{3} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\frac{1}{4}} + \left(1-\frac{2}{3}\right) \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

Problema 57 *Demostrar que las máscaras*

$$F_x = \frac{1}{4h} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\left(2-\sqrt{2}\right) & 0 & \left(2-\sqrt{2}\right) \\ \hline -2\left(\sqrt{2}-1\right) & 0 & 2\left(\sqrt{2}-1\right) \\ \hline -\left(2-\sqrt{2}\right) & 0 & \left(2-\sqrt{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

$$F_y = \frac{1}{4h} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\left(2-\sqrt{2}\right) & -2\left(\sqrt{2}-1\right) & -\left(2-\sqrt{2}\right) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \left(2-\sqrt{2}\right) & 2\left(\sqrt{2}-1\right) & \left(2-\sqrt{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

dan lugar a una discretización del gradiente tal que su norma euclídea es invariante por rotaciones de 45 grados.

Solución: Procedemos de la misma forma que al calcular el valor de γ en el caso del laplaciano.

Consideramos una función que tiene los siguientes valores en un entorno de un punto (hi_0, hj_0) :

1	1	1
0	0	0
0	0	0

Calculamos el valor del gradiente en el punto central de la siguiente manera:

$$F_x = \gamma \frac{0}{2h} + (1-\gamma) \frac{0}{4h} = 0$$

$$F_y = (1-\gamma) \frac{-1}{2h} + \gamma \frac{-2}{4h} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma}{h} - \frac{1}{2}\frac{1-\gamma}{h} = -\frac{1}{2h}$$

$$\nabla_1 F\left(hi_0, hj_0\right) = \left(F_x, F_y\right) = \left(-\frac{1}{2h}, 0\right)$$

Rotamos la función anterior 45^o :

1	1	0
1	0	0
0	0	0

y calculamos su gradiente:

$$F_x = (1-\gamma) \frac{-1}{2h} + \gamma \frac{-1}{4h} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma}{h} - \frac{1}{4}\frac{\gamma}{h} = \frac{1}{4}\frac{\gamma-2}{h}$$

$$F_y = (1-\gamma) \frac{-1}{2h} + \gamma \frac{-1}{4h} = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma}{h} - \frac{1}{4}\frac{\gamma}{h} = \frac{1}{4}\frac{\gamma-2}{h}$$

$$\nabla_2 F\left(hi_0, hj_0\right) = \left(F_x, F_y\right) = \frac{1}{4}\frac{\gamma-2}{h}(1,1)$$

Calculamos las normas de los gradientes e igualamos:

$$\left\|\nabla_1 F\left(hi_0, hj_0\right)\right\| = \left\|\nabla_2 F\left(hi_0, hj_0\right)\right\|$$

$$\frac{1}{2h} = \sqrt{2\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma-2}{h}\right)^2}$$

$$\frac{1}{2h} = \frac{1}{4h}\sqrt{2}\left|\gamma-2\right|$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}} = -(\gamma-2) \rightarrow \gamma = 2-\sqrt{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} = (\gamma-2) \rightarrow \gamma = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

La solución válida es $\gamma = 2-\sqrt{2}$, ya que el gradiente $\nabla_2 F$ debe ser negativo en sus dos derivadas.

Sustituyendo este valor en las expresiones de F_x, F_y tenemos:

$$F_x = (1-\gamma) \frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{2h} +$$

$$+\gamma \frac{F_{i+1,j+1}-F_{i-1,j+1}+F_{i+1,j-1}-F_{i-1,j-1}}{4h} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2}-1\right) \frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{4h} +$$

$$+ \left(2-\sqrt{2}\right) \frac{F_{i+1,j+1}-F_{i-1,j+1}+F_{i+1,j-1}-F_{i-1,j-1}}{4h}$$

$$F_y = (1-\gamma) \frac{F_{i,j+1}-F_{i,j-1}}{2h} +$$

$$+\gamma \frac{F_{i+1,j+1}-F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}-F_{i-1,j-1}}{4h} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2}-1\right) \frac{F_{i,j+1}-F_{i,j-1}}{4h} +$$

$$+ \left(2-\sqrt{2}\right) \frac{F_{i+1,j+1}-F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}-F_{i-1,j-1}}{4h},$$

cuyas máscaras son las que se muestran en el enunciado del problema.

Problema 58 *Calcular una aproximación del gradiente de una función $F(x,y)$ en el punto $(x,y) = (0,0)$ conociendo los siguientes valores:* $F(0,0) = 0$, $F(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}$, $F(-\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{2}$, $F(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $F(0,-\frac{1}{2}) =$

$\frac{1}{2}$, $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0$, $F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = 0$, $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -1$, $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = 1$

Solución: Los valores de la función en una tabla quedan de la siguiente manera:

0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{-1}{2}$	0

Sustituimos estos valores en las derivadas de la función:

$$F_x = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{4h}+$$
$$+\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{F_{i+1,j+1}-F_{i-1,j+1}+F_{i+1,j-1}-F_{i-1,j-1}}{4h} =$$
$$= 2\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4h}+\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{1+1}{4h} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{h}+\frac{1}{2}\frac{2-\sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2h}$$
$$F_y = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{F_{i,j+1}-F_{i,j-1}}{4h}+$$
$$+\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{F_{i+1,j+1}-F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}-F_{i-1,j-1}}{4h} =$$
$$= 2\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}}{4h}+\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{-1-1}{4h} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{h}-\frac{1}{2}\frac{2-\sqrt{2}}{h} = -\frac{1}{2h}$$

y obtenemos el valor del gradiente:

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Este vector nos da la dirección de máximo ascenso, que en este caso será en diagonal hacia arriba a la derecha.

Problema 59 *Aproximar el valor de la siguiente integral, utilizando las fórmulas de Legendre para $n = 2$ y $n = 3$*

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^4\right)dx$$

Cual es el valor exacto de la integral?

Solución:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^4\right)dx \simeq \sum_{k=0}^{N} w_k P\left(x_k\right)$$

$$P\left(x\right) = \left(x^3-x^4\right)$$

1. $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{2} w_k P\left(x_k\right) =$$
$$= 1\cdot P(0.5773502692 + 1\cdot P\left(-0.5773502692\right) =$$
$$= -.222\,22$$

2. $n = 3$

$$\sum_{k=1}^{3} w_k P\left(x_k\right) =$$
$$= 0.55555555555\cdot P\left(0.7745966692\right)+$$
$$+0.88888888\cdot P\left(0\right)+$$
$$+0.55555555555\cdot P\left(-0.7745966692\right) =$$
$$= -.\,4$$

El valor exacto de la integral es $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^4\right)dx = -\frac{2}{5} = -.\,4$, que coincide con el valor del segundo caso. La fórmula de integración numérica es exacta hasta el orden $2n-1$, que en el segundo caso es equivalente a 5, con lo que ya se sabía que el valor obtenido sería exacto.

Problema 60 *Se considera para el intervalo $[-1,1]$, los puntos $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0.5$ y los pesos $w_0 = w_1 = w_2 = 2/3$. Estos puntos y estos pesos se utilizan para aproximar la integral de una función en $[-1,1]$. Usar esta fórmula de integración para calcular númericamente la siguiente integral y compararla con el resultado análitico (exacto).*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx$$

Solución:

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx = \sin(x)\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-(-1) = 2$

   $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx = \int_{-1}^{1}\cos(\frac{\pi}{2}t)\frac{\pi}{2}dt = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}\cos\left(0\right) + \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
   $= \frac{1}{3}\sqrt{2}\pi + \frac{1}{3}\pi = 2.\,528\,2$

Problema 61 *Encontrar cual sería la fórmula de integración numérica en el intervalo $[-1,1]$ utilizando un sólo punto de interpolación, y de tal manera que sea exacta para polinomios de grado 1*

Solución: La fórmula que usa un único punto se puede expresar como

$$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx \simeq w_0\cdot f\left(x_0\right)$$

Vamos a imponer que se exacta para los polinomios $f(x) = 1$ y $f(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = w_0\cdot f\left(x_0\right) = w_0 \quad\rightarrow\quad w_0 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_0 \cdot f(x_0) = w_0 \cdot x_0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0$$

Por lo tanto, la fórmula de integración numérica de Legendre es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq 2 \cdot f(0),$$

Problema 62 *A partir de los ceros y de los pesos asociados a los polinomios de Legendre, y dado un intervalo $[a,b]$ cualquiera, encontrar los puntos x_k, y los pesos w_k que hacen exacta hasta el orden $2N-1$ una fórmula de integración numérica sobre el intervalo $[a,b]$*

Solución: Para encontrar los puntos $\hat{x}_k$, y los pesos $\hat{w}_k$, hay que hacer un cambio de variable en la integral:

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \sum_{k=1}^{N} \hat{w}_k f(\hat{x}_k)$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b-a)t+(b+a)}{2}$$
$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

este cambio representa la recta que pasa por los puntos -1, 1 para $t = a, b$, respectivamente.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)\,t+b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \sum_{k=1}^{N} \tilde{w}_k \frac{b-a}{2} f\left(\frac{(b-a)\,\tilde{x}_k+b+a}{2}\right)$$

de donde se deduce que los cambios a realizar son de la forma

$$\hat{x}_k = \frac{(b-a)\tilde{x}_k+(b+a)}{2},$$
$$\hat{w}_k = \frac{(b-a)}{2} \tilde{w}_k$$

Problema 63 *Utilizar el resultado del problema anterior para calcular de forma exacta la siguiente integral*

$$\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx$$

Solución: El resultado de la integral calculada de forma analítica, da el siguiente resultado:

$\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{12} = 8.3333 \times 10^{-2}$

Aplicando el método de integración numérica:

$f(x) = \left(x^2 - x^3\right)$

$\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \sum\limits_{k=1}^{3} w_k f(x_k) =$

$= w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) =$

$= \left(\frac{1-0}{2}\right)\left(\tilde{w}_0 f\left(\frac{\tilde{x}_0+1}{2}\right) + \tilde{w}_1 f\left(\frac{\tilde{x}_1+1}{2}\right) + + \tilde{w}_2 f\left(\frac{\tilde{x}_2+1}{2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}(0.55555556 \cdot f\left(\frac{0.7745966692+1}{2}\right) +$

$+0.8888888889 \cdot f\left(\frac{0+1}{2}\right) +$

$+0.55555556 \cdot f\left(\frac{-0.7745966692+1}{2}\right)) =$

$= 8.3333 \times 10^{-2}$

Problema 64 *Calcular de forma exacta la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^3 - x^2\right) e^{-x^2} dx$$

utilizando los polinomios de Hermite.

Solución: De forma analítica la integral da como resultado:

$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^3 - x^2\right) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = -.88623$

Utilizando el método de integración numérica:

$f(x) = \left(x^3 - x^2\right)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^3 - x^2\right) e^{-x^2} dx = \sum\limits_{k=1}^{2} w_k f(x_k)$

$= w_1 f(x_1) + w_2 f(x2) =$

$= 0.8862269255 \cdot f(-0.707106781) +$

$+0.8862269255 \cdot f(0.707106781) =$

$= -.88623$

Problema 65 *Aproximar, utilizando dos puntos de aproximación, el valor de la integral:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Solución:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{1+x^2} e^{-x^2} dx = \pi$

$f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \simeq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) =$

$= 0.8862269255 \cdot f(-0.707106781) +$

$+0.8862269255 \cdot f(0.707106781) =$

$= 1.9482$

Problema 66 *Calcular de forma exacta la integral*

$$\int_0^\infty \left(x^3 - x^2\right) e^{-x} dx$$

utilizando los polinomios de Laguerre.

Solución:

$\int_0^\infty \left(x^3 - x^2\right) e^{-x} dx = 4$

$\int_0^\infty \left(x^3 - x^2\right) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{1} w_k f\left(x_k\right) =$

$= w_0 f\left(x_0\right) + w_1 f\left(x_1\right) =$

$= 0.8535533903 \cdot f\left(0.585786438\right) +$

$+0.1464466093 \cdot f\left(3.414213562\right) =$

$= 4.0$

Problema 67 *Calcular una fórmula de aproximación numérica de la integral siguiente*

$$\int_a^\infty f(x) e^{-x} dx$$

donde a es un número real cualquiera

Solución: Para calcular esta integral realizamos un cambio de variable

$\int_0^\infty f(t) e^{-t} dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x - a \\ dt = dx \end{array} \right\} =$

$= \int_a^\infty f(x-a) e^{-x+a} dx = e^a \int_a^\infty f(x-a) e^{-x}$

$\int_0^\infty f(t) e^{-t} dx = \sum_{k=0}^{N} \tilde{w}_k f\left(\tilde{x}_k\right)$

$e^a \int_a^\infty f(x-a) e^{-x} = e^a \sum_{k=1}^{N} w_k f\left(x_k - a\right)$

Para que estas dos igualdades sean equivalentes, basta hacer:

$$\begin{array}{l} x_k = \tilde{x}_k + a \\ w_k = e^{-a} \tilde{w}_k \end{array}$$

Problema 68 *Aproximar, por el método de Simpson, la integral*

$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^4\right) dx$$

utilizando únicamente el valor de la función en los puntos: $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ *y* 1.

Solución:

$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^4\right) dx = -\frac{2}{5} = -.4$

Aplicamos el método de Simpson:

$f(x) = \left(x^3 - x^4\right)$

$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^4\right) dx =$

$= \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x^4\right) dx + \int_0^1 \left(x^3 - x^4\right) dx \simeq$

$\simeq \left. \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k) + 4f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)}{6} \left(x_{k+1} - x_k\right) \right]_{-1}^{0} +$

$+ \left. \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k) + 4f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)}{6} \left(x_{k+1} - x_k\right) \right]_{0}^{1} =$

$\simeq \frac{f(0) + f(-1) + 4f\left(\frac{-1+0}{2}\right)}{6} (0+1) +$

$+ \frac{f(1) + f(0) + 4f\left(\frac{1+0}{2}\right)}{6} (1-0) =$

$= -\frac{5}{12} = -.41667$

Problema 69 *Deducir la fórmula de integración numérica sobre el rectángulo* $[-1,1]x[-1,1]$ *resultante de aplicar la integración numérica en una variable en los intervalos* $[-1,1]$, *y* $[-1,1]$.

Solución:

$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} F(x,y)\, dy dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{N} \tilde{w}_k F\left(\tilde{x}_k, y\right) dy =$

$= \sum_{k=1}^{N} \tilde{w}_k \int_{-1}^{1} F\left(\tilde{x}_k, y\right) dy$

$= \sum_{k=1}^{N} \tilde{w}_k \left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{w}_j F\left(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\right) \right)$

$= \sum_{k,j=1}^{N} \tilde{W}_k F\left(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k\right),$

donde

$$\tilde{W}_k = \tilde{w}_k \tilde{w}_j$$

$$\tilde{w}_k = \int_{-1}^{-1} \frac{\prod_{i \neq k} (x - \tilde{x}_i)}{\prod_{i \neq k} (\tilde{x}_k - \tilde{x}_i)}$$

$$\tilde{w}_j = \int_{-1}^{-1} \frac{\prod_{i \neq k} (y - \tilde{y}_i)}{\prod_{i \neq k} (\tilde{y}_k - \tilde{y}_i)}$$

y los $\tilde{x}_k$ e $\tilde{y}_k$ son los ceros del polinomio de Legendre.

Problema 70 *Deducir la fórmula de integración numérica sobre un rectángulo* $[a,b]x[c,d]$ *resultante de aplicar la integración numérica en una variable en los intervalos* $[a,b]$, *y* $[c,d]$.

Solución:

$\int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dydx = \int_c^d \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{w}_k F(\tilde{x}_k, y)\,dy =$

$= \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{w}_k \int_c^d F(\tilde{x}_k, y)\,dy$

$= \sum\limits_{k=1}^{N} \tilde{w}_k \left(\sum\limits_{j=1}^{N} \tilde{w}'_j F(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \right)$

$= \sum\limits_{k,j=1}^{N} \tilde{w}_k \tilde{w}'_j F(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\,,$

ahora bien, teniendo en cuenta los resultados obtenidos al integrar en una variable tenemos que :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= \tfrac{(b-a)x_k+(b+a)}{2} \\ \tilde{w}_k &= \tfrac{(b-a)}{2} w_k \\ \tilde{y}_k &= \tfrac{(d-c)y_k+(d+c)}{2} \\ \tilde{w}'_j &= \tfrac{(d-c)}{2} w_k \end{aligned}$$

donde w_k son los pesos al integrar en una variable en el intervalo $[-1,1]$.

Problema 71 *Calcular de forma exacta la integral*

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2y^2dxdy$$

utilizando integración numérica.

Solución: El resultado de la integral es:

$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2dxdy = \frac{4}{9} = .444\,44$

Utilizando la fórmula de integración numérica:

$P(x) = x^2$

$P(y) = y^2$

$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2dxdy =$

$= \int_{-1}^1 x^2dx \int_{-1}^1 y^2dy =$

$= \sum\limits_{k=1}^{2} \tilde{w}_k P(\tilde{x}_k) \sum\limits_{k=1}^{2} \tilde{w}_j P(\tilde{y}_k) =$

$= (\tilde{w}_1 P(\tilde{x}_1) + \tilde{w}_2 P(\tilde{x}_2)) \cdot$

$\cdot (\tilde{w}_1 P(\tilde{y}_1) + \tilde{w}_2 P(\tilde{y}_2)) =$

$= (P(0.5773502692) + P(-0.5773502692)) \cdot$

$\cdot (P(0.5773502692) + P(-0.5773502692)) =$

$= .666\,67 \cdot .666\,67 = .444\,45$

Problema 72 *Calcular una aproximación numérica de la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2} \frac{x}{1+e^{y^2}}dxdy$$

utilizando la evaluación de $F(x,y)$ en 4 puntos.

Solución: Si calculamos el resultado de la integral de forma analíta, nos queda,

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^2 \frac{x}{1+e^{y^2}} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+e^{y^2}}\,dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+e^{y^2}}\,dy = 2.\,144\,3$

$\int_0^2 xdx = \sum\limits_{k=0}^{1} w_k P(x_k),$

realizando un cambio de variables, y utilizando el polinomio de Legendre de segundo orden,

$x_k = \frac{(b-a)\tilde{x}_k}{2} + \frac{(b+a)}{2} = \tilde{x}_k + 1,$

1. $w_k = \frac{(b-a)}{2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_k,$

tenemos:

$P(x) = x$

$\int_0^2 xdx =$

$= w_1 P(x_1) + w_2 P(x_2) =$

$= (0.5773502692 + 1) + (-0.5773502692 + 1) =$

$= 2.0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+e^{y^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{-y^2}+1} e^{-y^2} dy = \sum\limits_{k=1}^{2} \tilde{w}_j P(\tilde{y}_k),$ por Hermite,

1. $P(y) = \frac{1}{e^{-y^2}+1}$

$\sum\limits_{k=0}^{1} w_j P(y_k) =$

$= w_1 P(y_1) + w_2 P(y_2) =$

$= 0.8862269255 \cdot P(-0.707106781) +$

$+0.8862269255 \cdot P(0.707106781) =$

$= 1.\,103\,3$

El resultado de la aproximación numérica es,

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^2 \frac{x}{1+e^{y^2}}dxdy = 2.0 \cdot 1.1033 = 2.2066$

Problema 73 *Se considera el triángulo T de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Deducir cual debe ser el punto (x_0, y_0) y el peso w_0 para que la fórmula de integración numérica:*

$$\int_T F(x,y)dxdy \approx F(x_0,y_0)w_0$$

sea exacta para polinomios de grado 1 en x e y. Es decir $P(x,y) = ax + by + c$

Solución:

Calculamos la integral de forma analítica:

$\int_0^1\int_0^{1-x}(ax+by+c)\,dydx = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c$

Igualamos el valor de la integral con la fórmula de integración numérica:

$\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c = w_0(x_0a + y_0b + c)$

Calculamos w_0, x_0 e y_0 dando valores a a, b, c

$a = b = 0, c = 1; \frac{1}{2}c = w_0c \rightarrow w_0 = \frac{1}{2}$

$a = c = 0, b = 1; \frac{1}{6}b = w_0y_0b \rightarrow y_0 = \frac{1}{3}$

$b = c = 0, a = 1; \frac{1}{6}a = w_0x_0a \rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$,

luego para los valores $w_0 = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{3}$ la fórmula de integración es exacta.

Problema 74 *Calcular una aproximación numérica de la integral*

$$\int_\Omega x^2ydxdy$$

donde Ω es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$ utilizando 1 punto, 3 puntos, y 4 puntos

Solución: El cálculo de la integral de forma analítica nos da:

$\int_\Omega x^2ydxdy = \int_0^2\int_0^{2-x}(x^2y)\,dydx = \frac{8}{15} = .53333$

Utilizando las fórmulas de integración numérica:

$F(x,y) = x^2y$

El área del triángulo$\rightarrow$ $Area(T) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

1. Para 1 punto:

   $\int_\Omega x^2ydxdy =$

   $= F(\frac{2}{3},\frac{2}{3})Area(T) =$

   $= \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{2}{3}2 = \frac{16}{27} =$

   $= .59259$

2. Para 3 puntos:

   $\int_\Omega x^2ydxdy =$

   $= \frac{1}{3}Area(T)\left(F(\frac{2}{2},0) + F(\frac{2}{2},\frac{2}{2}) + F(0,\frac{2}{2})\right) =$

   $= \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} =$

   $= .66667$

3. Para 4 puntos:

   $\int_\Omega x^2ydxdy =$

   $= Area(T)[\frac{25}{48}\left(F(\frac{4}{10},\frac{4}{10}) + F(\frac{12}{10},\frac{4}{10}) + F(\frac{4}{10},\frac{12}{10})\right) -$

   $-\frac{27}{48}F(\frac{2}{3},\frac{2}{3})] = \frac{8}{15} =$

   $= .53333$

ANALISIS NUMERICO MATRICIAL II

Problema 75 ***(4 puntos)*** *Tomar $N = 2$ y demostrar que la norma $\parallel x \parallel_2$ verifica las propiedades de la definición de norma*

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$$

Solución: En esta demostración vamos a generalizar para cualquier p. Al final particularizamos para $p = 2$ con el fin de hacer que la demostración sea más sencilla.

Las propiedades que debe verificar, para cumplir con la defición de norma, son:

1. $\|x\|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

   $\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} = 0 \Longrightarrow |x_1|^p + |x_2|^p = 0$,

   la suma, en valor absoluto, de elementos distintos de cero da un valor positivo mayor que cero, con lo que para que se cumpla esta condición, se tiene que cumplir que $x_1 = x_2 = 0$, c.q.d..

2. $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p \, , \forall \lambda \in K \;\; y \;\; x \in E;$

$\|\lambda x\|_p = \sqrt[p]{|\lambda x_1|^p + |\lambda x_2|^p}$

$\|\lambda x\|_p = \sqrt[p]{|\lambda|^p |x_1|^p + |\lambda|^p |x_2|^p}$

$\|\lambda x\|_p = \sqrt[p]{|\lambda|^p \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)}$

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$, c.q.d.

3. $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \, , \forall x, y \in E;$

$\sqrt[p]{|x_1+y_1|^p + |x_2+y_2|^p} \le \|x\|_p + \|y\|_p \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |x_1+y_1|^p + |x_2+y_2|^p \le$

$\le \left(\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} + \sqrt[p]{|y_1|^p + |y_2|^p} \right)^p$

Para $p = 2$ tenemos:
$|x_1+y_1|^2 + |x_2+y_2|^2 \le$

$\le \left(\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} + \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} \right)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 \le$

$\le x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2+x_2^2)}\sqrt{(y_1^2+y_2^2)} + y_1^2 + y_2^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 \le \sqrt{(x_1^2+x_2^2)}\sqrt{(y_1^2+y_2^2)} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 \le$

$\le x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2x_1y_1x_2y_2 \le x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0 \le x_1^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_1^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0 \le (x_1y_2 + x_2y_1)^2,$

que siempre es cierto, con lo que queda demostrado.

Problema 76 *Demostrar que*

$$Lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_i |x_i|$$

Solución:

$$Lim_{p\to\infty} \|x\|_p = Lim_{p\to\infty} \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p} \right)$$

Extraemos el máximo componente de x, $x_{\max}$.

$$Lim_{p\to\infty} \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p} \right) =$$

$$= Lim_{p\to\infty} \left(\sqrt[p]{|x_{\max}|^p \sum_{i=1}^N \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p} \right) =$$

$$= Lim_{p\to\infty} \left(|x_{\max}| \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p} \right) =$$

$$= |x_{\max}| \, Lim_{p\to\infty} \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^N \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p} \right) =$$

$$= |x_{\max}| \, Lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p \right)^{1/p}$$

Todos los elementos $\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}$ son menores o iguales que 1, con lo que

$$Lim_{p\to\infty} \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p = \begin{cases} 1 & si \quad x_i = x_{\max} \\ 0 & si \quad x_i \ne x_{\max} \end{cases},$$

entonces

$$|x_{\max}| \, Lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{|x_i|}{|x_{\max}|}\right)^p \right)^{1/p} =$$

$$= |x_{\max}| \, Lim_{p\to\infty} \left(0 + \ldots + 0 + 1 + \ldots + 1\right)^{1/p} =$$

$= |x_{\max}|$, c.q.d.

Problema 77 *Tomar $N = 2$, y dibujar el lugar geométrico de los vectores $x = (x_1, x_2)$ que verifican*

1. $\|x\|_1 < 1$
2. $\|x\|_2 < 1$
3. $\|x\|_\infty < 1$

Solución: En las gráficas 1, 2 y 3 se muestran los lugares geométricos de las normas 1, 2 e infinito, respectivamente.

1. $\|x\|_1 < 1 \Longrightarrow |x| + |y| < 1 \Longrightarrow y < 1 - x$

   Esta ecuación representa, como borde, una recta de pendiente negativa. Tal y como se ve en la figura 1, el lugar geométrico está contenido en un rombo.

2. $\|x\|_2 < 1 \Longrightarrow \sqrt{(x^2+y^2)} < 1 \Longrightarrow \left(x^2+y^2\right) < 1$

   Esta es la ecuación de un círculo de radio menor que 1 y centro el origen. En la figura 2 se muestra el lugar geométrico.

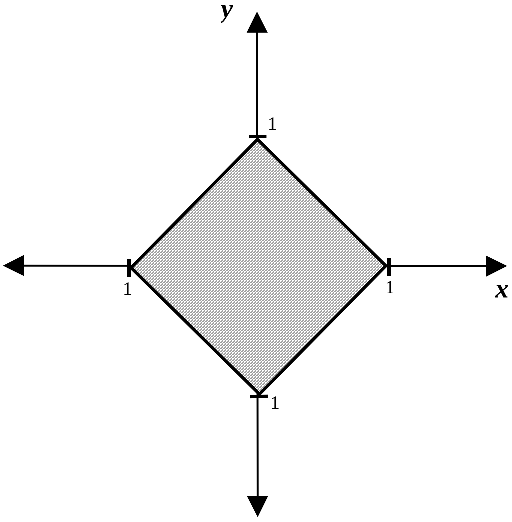


Figure 1: Lugar geométrico de $\|x\|_1$

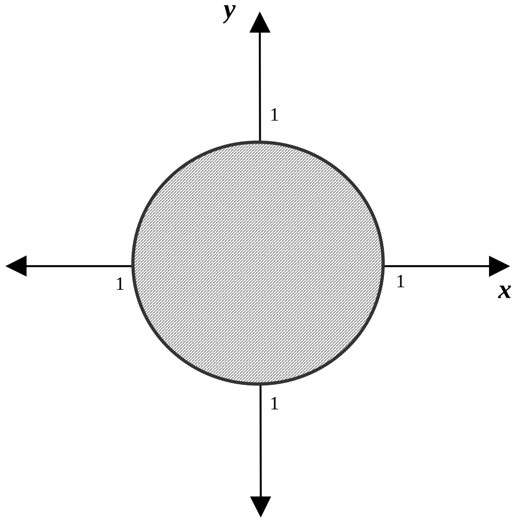


Figure 2: Lugar geométrico de $\|x\|_2$

3. $\|x\|_\infty < 1 \Longrightarrow \max(x, y) < 1$

   Esto representa una recta de valor constante (x, y) menor que 1. En la figura 3 se puede ver el lugar geométrico.

Problema 78 *Tomar $N = 2$ y demostrar la siguiente desigualdad*

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1$$

Solución: Esta desigualdad es equivalente a lo siguiente:

$$\max(|x_1|, |x_2|) \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \leq |x_1| + |x_2|$$

1. $\max(|x_1|, |x_2|) \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \Longleftrightarrow$

   $$\Longleftrightarrow |x_{\max}| \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow x_{\max}^2 \leq x_1^2 + x_2^2$$

   Esta desigualdad siempre es cierta ya que $x_{\max}$ es o bien x_1 o bien x_2.

2. $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \leq |x_1| + |x_2| \Longleftrightarrow$

   $$\Longleftrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq (|x_1| + |x_2|)^2 \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 2|x_1||x_2| + x_2^2 \Longleftrightarrow$$

   $$\Longleftrightarrow 0 \leq 2|x_1||x_2|$$

   Esto siempre es cierto ya que el producto de valores positivos siempre es positivo (o igual a cero si algún x_i es cero).

3. $\max(|x_1|, |x_2|) \leq |x_1| + |x_2|$. Es trivial (propiedad transitiva).

De estas demostraciones se deduce que las distintas normas coinciden cuando el vector x descansa sobre uno de los ejes de coordenadas.

Problema 79 *Demostrar que si A, B son dos matrices de dimensión NxN, entonces para cualquier norma de matrices subordinada a una norma vectorial se verifica*

$$\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$$

Solución:

$$\sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|x\|} \tfrac{\|Bx\|}{\|Bx\|},$$

$$\sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \tfrac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_x \tfrac{\|Bx\|}{\|x\|} \cdot \sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|Bx\|}$$

$$\sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \tfrac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|B\| \cdot \|A\|,$$

entonces

$$\sup_x \tfrac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|B\| \cdot \|A\|, \text{ c.q.d.}$$

Problema 80 *Demostrar que los autovalores de A son los ceros del polinomio característico $P(\lambda)$.*

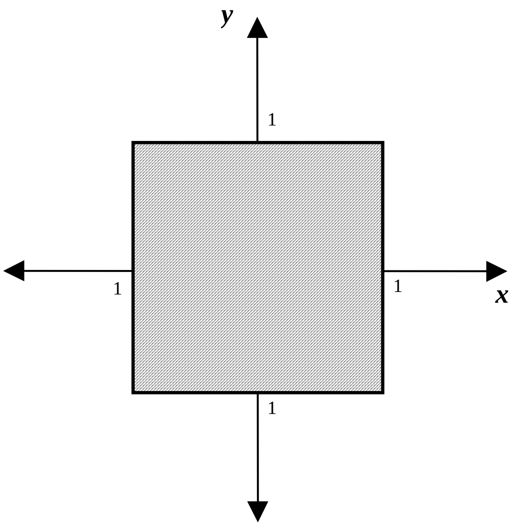


Figure 3: Lugar geométrico de $\|x\|_\infty$

Solución: Definición de autovalor de una matriz A:

$$x_i \neq 0 \in \mathbb{E}, \lambda_i \in \mathbb{C} \diagup Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$Ax_i = \lambda_i x_i \Longrightarrow (A - \lambda_i Id)x_i = 0$$

como $x_i \neq 0$, entonces

$$|A - \lambda_i Id| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = 0, \text{ c.q.d.}$$

Problema 81 *Calcular los autovectores de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y determinar una base ortonormal de R^3 de autovectores de A.

Solución: Calculamos los autovalores de A :

$$|A - \lambda_i Id| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = ((1-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 2$$

Calculamos los autovectores de A :

1. $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda_2, \lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ \\ x_3 \text{ libre} \end{array} \right.$$

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

contiene los autovectores de A que forman una base ortogonal en R^3.

Problema 82 *Calcular las normas* 2, 1 *e infinito de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\tfrac{3+1\sqrt{5}}{2}} = 1.618$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 3\lambda + \lambda^2 = 0, \; \lambda = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

2. $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|\right)$

$$\|A\|_1 = \max(1, 2) = 2$$

3. $\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|\right) =$

$$\|A\|_\infty = \max(2, 1) = 2$$

Problema 83 *Demostrar la siguiente igualdad:*

$$\rho(A^tA) = \rho(AA^t)$$

Solución:

Veamos que los polinomios característicos coinciden :

$$|A^tA - \lambda_i Id| = |A^t|^{-1} |A^tA - \lambda_i Id| \, |A^t| =$$

$$= \left| (A^t)^{-1} A^tAA^t - \lambda_i (A^t)^{-1} IdA^t \right| =$$

$$= \left| AA^t - \lambda_i (A^t)^{-1} A^t \right| =$$

$$= |AA^t - \lambda_i Id|$$

Problema 84 *Demostrar que si los autovectores de una matriz A de dimensión NxN forman una base ortonormal de R^N, entonces para la norma 2 se cumple:*

$$\chi(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\max_i\{|\lambda_i|\}}{\min_i\{|\lambda_i|\}}$$

Solución: Al ser una base de autovectores ortonormal, la norma $\|A\|_2 = \rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$

Los autovalores de A^{-1} vienen dados por:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{-1}Ax_i = A^{-1}\lambda_i x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tfrac{1}{\lambda_i} x_i = A^{-1}x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{-1}x_i = \lambda_i' x_i,$$

donde $\lambda_i' = \frac{1}{\lambda_i}$, es decir, los autovalores de A^{-1} son los inversos de los de A y sus autovectores son los mismos, luego la norma de $\left\|A^{-1}\right\|_2 = \rho(A^{-1})$

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max_i \{|\lambda_i'|\} = \max_i \left\{ \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| \right\} = \frac{1}{\min_i \{|\lambda_i|\}},$$

entonces

$$\chi(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2$$

$$\chi(A) = \max_i \{|\lambda_i|\} \cdot \tfrac{1}{\min_i\{|\lambda_i|\}}$$

$$\chi(A) = \tfrac{\max_i\{|\lambda_i|\}}{\min_i\{|\lambda_i|\}}, \text{ c.q.d.}$$

Problema 85 *Calcular el condicionamiento para la norma 2, de las siguientes matrices:*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: El condicionamiento de una matriz $\chi(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2$. Calculamos los autovalores de ambas matrices:

1. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right]$
$-2\,[2(1-\lambda)+2] \; -2\,[2+2(1-\lambda)] =$
$(2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda\right] - 8\,(2-\lambda) = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda + 8\right]$
de donde obtenemos

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -2$$
$$\lambda_3 = 4$$

Esta matriz es simétrica, luego posee una base ortonormal [3] de autovectores, con lo que el condicionamiento de A se puede calcular como:

$$\chi(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\max_i\{|\,\lambda_i\,|\}}{\min_i\{|\,\lambda_i\,|\}} = \frac{4}{2} = 2$$

2. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 10\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2}$$
$$\lambda_1 = 2-\sqrt{2}$$

También es una matriz simétrica, con lo que sus autovectores forman una base ortonormal y su condicionamiento es:

$$\chi(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\max_i\{|\,\lambda_i\,|\}}{\min_i\{|\,\lambda_i\,|\}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$$

Problema 86 *Sean las matrices A, R. Demostrar que la matriz A, y la matriz $B = R^{-1}AR$ poseen los mismos autovalores*

Solución:

$$Bx_i = \lambda_i x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(R^{-1}AR\right) x_i = \lambda_i x_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow RR^{-1}ARx_i = R\lambda_i x_i \Longrightarrow$$

[3] Vectores ortonormales: dos vectores son ortonormales si cumplen lo siguiente, $x_i^T x_j = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & i \neq j \\ 1 & si & i = j \end{array} \right.$

$$\Longrightarrow ARx_i = \lambda_i Rx_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Ay_i = \lambda_i y_i,$$

de donde se deduce que los autovalores son los mismos y los autovectores están relacionados por la siguiente igualdad: $y_i = Rx_i$, c.q.d.

Problema 87 *Se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el ángulo α tal que la matriz

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

verifique que la matriz $B = R^{-1}AR$ sea diagonal.

Solución: Realizamos el cálculo de la matriz B :

$$B = R^{-1}AR =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cos\alpha\sin\alpha + 1 & 2\cos^2\alpha - 1 \\ 2\cos^2\alpha - 1 & 2\cos\alpha\sin\alpha + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que cumplir que los elementos que están fuera de la diagonal sean iguales a cero,

$$2\cos^2\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

De esta igualdad se obtiene el valor del ángulo α :

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

La matriz de rotación queda como sigue:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \\ -\sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos los elementos de la diagonal:

$$b_1 = -2\cos\alpha\sin\alpha + 1$$

$$b_1 = 0, b_1 = 2$$

$$b_2 = 2\cos\alpha\sin\alpha + 1$$

$$b_2 = 2, b_2 = 0,$$

luego las soluciones posibles son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 88 *Demostrar las siguientes igualdades trigonométricas*

$$\tan(\alpha) = -\cot(2\alpha) + sign(\cot(2\alpha))\sqrt{1+\cot^2(2\alpha)}$$

donde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $sign(x) = 1$ *si* $x \geq 0$ *y* $sign(x) = -1$ *si* $x < 0$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

$$\sin\alpha = \tan(\alpha)\cos\alpha$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{-\tan(\alpha) + \sin(2\alpha)}{2\sin^2(\alpha)}$$

Solución:

1. $\cot(2\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{1-\tan^2(\alpha)}{2\tan(\alpha)}$

   $$2\tan(\alpha)\cot(2\alpha) = 1 - \tan^2(\alpha)$$

   realizando el cambio de variable $x = \tan(\alpha)$, tenemos

   $$x^2 + 2\cot(2\alpha)x - 1 = 0$$

   $$x = \tan(\alpha) = \frac{-2\cot(2\alpha) \pm \sqrt{4\cot^2(2\alpha)+4}}{2} =$$

   $$= -\cot(2\alpha) \pm \sqrt{1+\cot^2(2\alpha)}$$

   $$\tan(\alpha) = \begin{cases} -\cot(2\alpha) + \sqrt{1+\cot^2(2\alpha)} & si \quad \alpha \geq 0 \\ -\cot(2\alpha) - \sqrt{1+\cot^2(2\alpha)} & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

   El segundo término es siempre mayor que el primero, con lo que es éste el que va a determinar el signo de la ecuación.

   Como $sign(\tan(\alpha)) = sign(\cot(\alpha))$, podemos expresar la anterior igualdad de la siguiente forma:

   $$\tan(\alpha) = -\cot(2\alpha) + sign(\cot(2\alpha))\sqrt{1+\cot^2(2\alpha)}$$

2. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}} =$

   $$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}}\sqrt{\cos^2(\alpha)} = \cos\alpha$$

3. $\sin\alpha = \tan(\alpha)\cos\alpha =$

   $$= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cos\alpha = \sin\alpha$$

4. $\cot(2\alpha) = \frac{-\tan(\alpha)+\sin(2\alpha)}{2\sin^2(\alpha)} =$

$$= \frac{-\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\sin^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{\frac{-\sin(\alpha)+2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{2\sin^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha)(-1+2\cos(\alpha)\cos(\alpha))}{2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{\left(2\cos^2(\alpha)-1\right)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \cot(2\alpha)$$

Problema 89 *Dentro del método de Jacobi para el cálculo de autovalores demostrar las igualdades*

$$\begin{aligned}
a'_{pq} &= 0\\
a'_{pp} &= a_{pp} - \tan(\alpha)a_{pq}\\
a'_{qq} &= a_{qq} + \tan(\alpha)a_{pq}\\
a'_{pj} &= a_{pj}\cos\alpha - a_{qj}\sin\alpha \quad j \neq p,q\\
a'_{qj} &= a_{pj}\sin\alpha + a_{qj}\cos\alpha \quad j \neq p,q
\end{aligned}$$

Solución: En el método de Jacobi se persigue construir una matriz diagonal a partir de una matriz A cualquiera, aplicándole transformaciones de la forma $B = R^{-1}AR$.

Según se ha demostrado en problemas anteriores, los autovalores de B y de A coinciden, con lo que si se consigue encontrar la matriz R que cumpla con la ecuación anterior, entonces habremos encontrado los autovalores de A.

La matriz R es una matriz de rotación y se calcula el ángulo, α, de la misma, transformando los valores de A que están fuera de la diagonal en ceros.

Vamos a expresar las matrices de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{p1} & a_{i1} & a_{q1} & a_{n1}\\ a_{p1} & a_{pp} & a_{pj} & a_{pq} & a_{pn}\\ a_{i1} & a_{pj} & a_{ij} & a_{qj} & a_{ni}\\ a_{q1} & a_{pq} & a_{qj} & a_{qq} & a_{qn}\\ a_{n1} & a_{pn} & a_{ni} & a_{qn} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$R_{pq}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & . & \sin\alpha & 0\\ 0 & . & 1 & . & 0\\ 0 & -\sin\alpha & . & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = R^{-1}AR =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{p1} & a_{i1} & a_{q1} & a_{n1}\\ a_{p1} & a_{pp} & a_{pj} & a_{pq} & a_{pn}\\ a_{i1} & a_{pj} & a_{ij} & a_{qj} & a_{ni}\\ a_{q1} & a_{pq} & a_{qj} & a_{qq} & a_{qn}\\ a_{n1} & a_{pn} & a_{ni} & a_{qn} & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{p1}\cos\alpha - a_{q1}\sin\alpha\\ a_{p1}\cos\alpha - a_{q1}\sin\alpha & a_{pp}\cos^2\alpha + a_{qq}\sin^2\alpha - a_{pq}\sin 2\alpha\\ a_{i1} & a_{pj}\cos\alpha - a_{qj}\sin\alpha\\ a_{p1}\sin\alpha + a_{q1}\cos\alpha & \frac{(a_{pp}-a_{qq})}{2}\sin 2\alpha + a_{pq}\cos 2\alpha\\ a_{n1} & a_{pn}\cos\alpha - a_{qn}\sin\alpha \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} a_{i1}\\ a_{pj}\cos\alpha - a_{qj}\sin\alpha\\ a_{ij}\\ a_{pj}\sin\alpha + a_{qj}\cos\alpha\\ a_{ni} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a_{p1}\sin\alpha + a_{q1}\cos\alpha & a_{n1}\\ \frac{(a_{pp}-a_{qq})}{2}\sin 2\alpha + a_{pq}\cos 2\alpha & a_{pn}\cos\alpha - a_{qn}\sin\alpha\\ a_{pj}\sin\alpha + a_{qj}\cos\alpha & a_{ni}\\ a_{pp}\sin^2\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha + a_{pq}\sin 2\alpha & a_{pn}\sin\alpha + a_{qn}\cos\alpha\\ a_{pn}\sin\alpha + a_{qn}\cos\alpha & a_{nn} \end{matrix}\right)$$

De esta matriz se deducen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
a'_{pq} &= \frac{(a_{pp}-a_{qq})}{2}\sin 2\alpha + a_{pq}\cos 2\alpha\\
a'_{pp} &= a_{pp}\cos^2\alpha + a_{qq}\sin^2\alpha - a_{pq}\sin 2\alpha\\
a'_{qq} &= a_{pp}\sin^2\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha + a_{pq}\sin 2\alpha\\
a'_{pj} &= a_{pj}\cos\alpha - a_{qj}\sin\alpha \qquad j \neq p,q\\
a_{qj} &= a_{pj}\sin\alpha + a_{qj}\cos\alpha \qquad j \neq p,q
\end{aligned}$$

En donde se iguala a'_{pq} a cero para calcular el ángulo de rotación:

$$a'_{pq} = 0 = \frac{(a_{pp}-a_{qq})}{2}\sin 2\alpha + a_{pq}\cos 2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2a_{pq}}{(a_{qq}-a_{pp})}$$

$$a_{qq} = a_{pp} + \frac{2a_{pq}}{\tan(2\alpha)}$$

Las dos últimas igualdades se obtienen directamente de la matriz final. Para obtener a'_{pp} y a'_{qq}, se opera de la siguiente manera:

1. $a'_{pp} = a_{pp}\cos^2\alpha + a_{qq}\sin^2\alpha - a_{pq}\sin 2\alpha =$

$$= a_{pp}\cos^2\alpha + \left(a_{pp} + \frac{2a_{pq}}{\tan(2\alpha)}\right)\sin^2\alpha -$$

$$-a_{pq}\sin 2\alpha = a_{pp}\cos^2\alpha +$$

$$+\left(\frac{a_{pp}\sin(2\alpha)+2a_{pq}\cos(2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)\sin^2\alpha - a_{pq}\sin 2\alpha =$$

$$= a_{pp}\cos^2\alpha +$$

$$+\left(\frac{a_{pp}2\sin\alpha\cos\alpha+2a_{pq}\cos^2\alpha-2a_{pq}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}\right)\sin\alpha -$$

$$-2a_{pq}\sin\alpha\cos\alpha = a_{pp}\cos^2\alpha + a_{pp}\sin^2\alpha +$$

$$+a_{pq}\cos\alpha\sin\alpha - a_{pq}\tan\alpha + a_{pq}\sin\alpha\cos\alpha -$$

$$-2a_{pq}\sin\alpha\cos\alpha = a_{pp} - a_{pq}\tan\alpha$$

2. $a'_{qq} = a_{pp}\sin^2\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha + a_{pq}\sin 2\alpha =$

$$= \left(a_{qq} - \frac{2a_{pq}}{\tan(2\alpha)}\right)\sin^2\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha +$$

$$+a_{pq}\sin 2\alpha =$$

$$= \left(\frac{a_{qq}2\sin\alpha\cos\alpha-2a_{pq}\cos^2\alpha+2a_{pq}\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)\sin^2\alpha +$$

$$+a_{qq}\cos^2\alpha + a_{pq}\sin 2\alpha = (a_{qq}\sin\alpha - a_{pq}\cos\alpha +$$

$$+\frac{a_{pq}}{\cos\alpha} - a_{pq}\cos\alpha)\sin\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha + a_{pq}\sin 2\alpha =$$

$$= a_{qq}\sin^2\alpha + a_{qq}\cos^2\alpha - a_{pq}\cos\alpha\sin\alpha +$$

$$+a_{pq}\tan\alpha - a_{pq}\cos\alpha\sin\alpha + 2a_{pq}\cos\alpha\sin\alpha =$$

$$= a_{qq} + \tan(\alpha)a_{pq}$$

Problema 90 *Utilizar el método de Jacobi para aproximar los autovalores y autovectores de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\frac{(a_{pp}-a_{qq})}{2}\sin 2\alpha + a_{pq}\cos 2\alpha = 0$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2a_{pq}}{(a_{qq}-a_{pp})}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2}{(1-2)}$$

$$\alpha = \frac{\arctan(-2)}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\arctan 2 = -.553\,57$$

$a_{11} = 2 - \tan(\alpha)$

$$a_{11} = 2 + \tan\left(\frac{1}{2}\arctan 2\right) = 2.\,618$$

$a_{33} = 1 + \tan(\alpha)$

$$a_{33} = 1 - \tan\left(\frac{1}{2}\arctan 2\right) = .\,381\,97$$

$a_{21} = a_{32} = 0$

$$B = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 2.\,618 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.\,381\,97 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son los elementos de la diagonal $(2.\,618, 1, 0.\,381\,97)$. Como $\alpha = -.\,553\,57$, la matriz

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.850\,65 & 0 & -0.525\,73 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.525\,73 & 0 & 0.850\,65 \end{pmatrix}$$

por tanto, en este caso, como con una única matriz de rotación conseguimos transformar A en una matriz diagonal, tendremos que los autovectores de A son simplemente los vectores columnas de $R(\alpha)$. Es decir el autovector del autovalor $2.\,618$ es $\left(\begin{array}{c} 0.850\,65 \\ 0 \\ 0.525\,73 \end{array}\right)$, el autovector del autovalor 1 es $\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)$, el autovector del autovalor $0.\,381\,97$ es $\left(\begin{array}{c} -0.525\,73 \\ 0 \\ 0.850\,65 \end{array}\right)$.

Problema 91 *Aplicar el método de la potencia para aproximar el autovalor máximo, y el autovector asociado, de las siguientes matrices, dando 3 pasos en el método, hasta calcular u^4 y partiendo de $u^1 = (1,1)$*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: En este problema vamos a utilizar la norma euclídea aunque cualquier otra norma también sería válida. La norma infinito, por ejemplo, simplificaría los cálculos ya que es inmediato obtener el máximo de un vector.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$u^2 = A\frac{u^1}{\|u^1\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^2 \right\| = \sqrt{5} = 2.\,236\,1$$

$$u^3 = A\frac{u^2}{\|u^2\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{10}\sqrt{5}\sqrt{2} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^3 \right\| = \sqrt{5} = 2.\,236\,1$$

$$u^4 = A\frac{u^3}{\|u^3\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{10}\sqrt{2} \\ \frac{1}{10}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{10}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^4 \right\| = \frac{1}{5}\sqrt{113} = 2.\,126$$

El autovalor máximo aproximado es $\lambda = 2.\,126$ y su autovector asociado es:

$$x_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{15}{226}\sqrt{113}\sqrt{2} \\ \frac{1}{226}\sqrt{113}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .\,997\,79 \\ 6.\,651\,9 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$u^2 = A\frac{u^1}{\|u^1\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^2 \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{26} = 2.\,549\,5$$

$$u^3 = A\frac{u^2}{\|u^2\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{26}\sqrt{26}\sqrt{2} \\ \frac{1}{13}\sqrt{26}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{26}\sqrt{26}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{26}\sqrt{26}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^3 \right\| = \frac{1}{13}\sqrt{1066} = 2.\,511\,5$$

$$u^4 = A\frac{u^3}{\|u^3\|} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{2132}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2132}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{27}{2132}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \\ \frac{2}{533}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\left\| u^4 \right\| = \frac{1}{82}\sqrt{65\,026} = 3.\,109\,8$$

El autovalor máximo aproximado es

$$\lambda = -3.\,109\,8,$$

con signo negativo ya que $sign\left(\left\langle u^4, u^3 \right\rangle\right) = -1$ y su autovector asociado es

$$x_\lambda = \begin{pmatrix} -\frac{27\cdot 82}{2132\sqrt{65\,026}}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \\ \frac{2\cdot 82}{533\sqrt{65\,026}}\sqrt{1066}\sqrt{26}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.\,958\,8 \\ .\,284\,09 \end{pmatrix},$$

con signo positivo ya que $\left(sign\left(\left\langle u^4, u^3 \right\rangle\right)\right)^n = (-1)^4 = 1.$

Problema 92 *Calcular el autovalor mayor y el autovector correspondiente de la matriz* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *utilizando el método de la potencia, dando* 2 *iteraciones del método a partir de* $u_1 = (1,1)$ *y tomando como norma* $\|u\| = \max_i |u_i|$

Solución:

1. $\|u_1\| = 1 \to u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\|u_2\| = 1 \to u_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Producto escalar $(u_2, u_3) = 2 > 0.$ $\to$ autovalor máximo $= \|u_3\| = 2$

   Autovector asociado normalizado $\frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 93 *Utilizar el método de la potencia inversa para aproximar el autovalor más pequeño de la matriz*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

llegar hasta u^3 *partiendo de* $u=(1,1)$.

Solución:

$Au^n = \frac{u^{n-1}}{\|u^{n-1}\|}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} u^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$u^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \left\|u^2\right\| = \frac{1}{3} = .333\,33$$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} u^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$u^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \left\|u^3\right\| = \frac{1}{6}\sqrt{10} = .527\,05$$

$\left\|u^3\right\|$ es el autovalor máximo de A^{-1}, con lo que el autovalor mínimo de A es $\lambda_{\min} = \frac{-1}{\|u^3\|} = -\frac{6}{10}\sqrt{10} = -1.897\,4$, con signo negativo ya que $sign\left(\left\langle u^3, u^2\right\rangle\right) = -1$.

Problema 94 *Calcular el autovalor y autovector más cercano a* 2 *de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para ello calcular dos iteraciones del método de la potencia inversa partiendo de $u^1=(1,1,1)$.

Solución:

$$A' = A - 2Id = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vamos a utilizar la norma infinito con el fin de simplificar los cálculos.

$A'u^n = \frac{u^{n-1}}{\|u^{n-1}\|}$

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u^2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \left\|u^2\right\| = \frac{5}{6} = .833\,33$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} u^3 = \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$u^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ \frac{14}{15} \\ \frac{2}{15} \end{pmatrix}, \left\|u^2\right\| = \frac{14}{15}$$

El autovalor máximo de $(A-2Id)^{-1}$ es $\lambda_{\max} = \frac{14}{15}$ con signo positivo ($sign\left(\left\langle u^3, u^2\right\rangle\right) = 1$)

$$(A-2Id)^{-1}\,\bar{x} = \lambda_{\max}\bar{x}$$

Para calcular el autovalor más cercano a 2, realizamos las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}}\bar{x} = (A-2Id)\,\bar{x}$$

$$\left(A - 2Id - \frac{1}{\lambda_{\max}}Id\right)\bar{x} = 0$$

$$\left(A - \left(2 + \frac{1}{\lambda_{\max}}\right) Id\right)\bar{x} = (A - \lambda_{prox} Id)\,\bar{x} = 0$$

$$\lambda_{prox} = \left(2 + \frac{1}{\lambda_{\max}}\right) = \left(2 + \frac{1}{\frac{14}{15}}\right) = \frac{43}{14}$$

$$\lambda_{prox} = 3.\,071\,4$$

Problema 95 *Calcular* 3 *iteraciones del método de Jacobi para resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partiendo de $u^1=(0,0,0)$

Solución: Despejamos la diagonal para plantear el método iterativo :

$$\begin{aligned} x_n &= y_{n-1}+1 \\ y_n &= \frac{x_{n-1}+3}{2} \\ z_n &= \frac{y_{n-1}+1}{3} \end{aligned}$$

haciendo iteraciones obtenemos

1. $u^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. $u^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

3. $u^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Problema 96 *Calcular una base ortogonal de autovectores de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Solución:

1. Autovectores y autovalores: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$

Problema 97 *Calcular* 3 *iteraciones del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

partiendo de $u^1 = (0, 0, 0)$

Solución: Despejamos la diagonal para plantear el método iterativo, teniendo en cuenta además que vamos actualizando los valores según los cálculamos:

$$\begin{aligned} x_n &= y_{n-1} + 1 \\ y_n &= \frac{x_n + 3}{2} \\ z_n &= \frac{y_n + 1}{3} \end{aligned}$$

haciendo iteraciones partiendo de $(0, 0, 0)$:

1. $x_1 = -1$
   $y_1 = \frac{3-1}{2} = 1$
   $z_1 = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$
2. $x_2 = 0$
   $y_2 = \frac{3}{2}$
   $z_3 = \frac{5}{6}$
3. $x_3 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
   $y_3 = \frac{3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4}$
   $z_3 = \frac{1+\frac{7}{4}}{3} = \frac{11}{12}$

Problema 98 *Una variante del método de Gauss-Seidel es tomar* $M = (D+U)^{-1}(-L)$, *y* $c = (D+U)^{-1} b$. *indicar en este caso que diferencias de implementación habría con respecto al caso anterior.*

Solución: El método es igual que en el problema anterior, excepto que en este caso los cálculos se realizarían de abajo para arriba, es decir, primero se calcularía z, se sustituiría su valor en la ecuación de y y, por último, estos dos valores se sustituirían en la primera ecuación.

Problema 99 *Calcular* 3 *iteraciones del método de relajación para resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

partiendo de $u^1 = (0, 0, 0)$. *Calcular previamente el parámetro de relajación óptimo*

Solución:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ -x + 2y &= 3 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Cálculo del $\mathbf{w}_{opt}$:

Al ser A tridiagonal, el w_{opt} se puede calcular como

$$w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(M_J)^2}}$$

M_J es la matriz del método de Jacobi que se obtiene despejando la diagonal en el sistema

$$\begin{aligned} x &= y - 1 \\ y &= \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \\ z &= \frac{y}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Los autovalores de M_J : $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, luego $\rho(M_J)^2 = \frac{1}{2}$

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(M_J)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}$$

$$w_{opt} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

$$w_{opt} = 1.1716$$

Iteraciones del sistema:

$$x_n = w(y_{n-1} - 1) + (1 - w) x_{n-1}$$

$$y_n = w\frac{3+x_n}{2} + (1 - w) y_{n-1}$$

$$z_n = w\frac{1+y_n}{3} + (1 - w) z_{n-1}$$

$$u^2 = \begin{pmatrix} -w \\ w\frac{3-w}{2} \\ w\frac{1+1.0711}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1716 \\ 1.0711 \\ .80883 \end{pmatrix}$$

$$u^3 = \begin{pmatrix} w\,(1.0711-1)-(1-w)\,1.1716 \\ w\frac{3+.28435}{2}+(1-w)\,1.0711 \\ w\frac{1+1.7402}{3}+(1-w)\,.80883 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} .28435 \\ 1.7402 \\ .93134 \end{pmatrix}$$

$$u^4 = \begin{pmatrix} w\,(1.7402-1)+(1-w)\,.28435 \\ w\frac{3+.81842}{2}+(1-w)\,1.7402 \\ w\frac{1+1.9382}{3}+(1-w)\,.93134 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} .81842 \\ 1.9382 \\ .98765 \end{pmatrix}$$

Problema 100 *Demostrar que si una matriz A verifica que por filas o columnas su suma es siempre igual a 0, entonces el determinante de A es cero, y por tanto el sistema asociado a A no tiene solución.*

Solución: Si $|A|=0$, entonces la matriz A no es invertible y el sistema no tiene solución.

1. Vamos a demostrar que si la suma por filas de A es igual a cero, entonces $|A|=0$:

   $\sum_j^n a_{ij}=0$, esto es equivalente a lo siguiente:

   $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Esto significa que la matriz A posee un autovalor igual a cero ($\lambda=0$).

   El determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores:

   $$|A| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda_1\cdot\ldots0\ldots\cdot\lambda_n = 0$$

2. Para demostrar que $|A|=0$ cuando la suma por columnas es cero, basta saber que $|A|=\left|A^T\right|$ y aplicar el argumento anterior a A^T

Problema 101 *Dado un sistema iterativo*

$$u^n = Mu^{n-1}+c$$

Demostrar que aunque el radio espectral de M sea mayor que 1, si u^1 y c son combinaciones lineales de autovectores de M correspondientes a autovalores de módulo menor que 1, entonces el método converge.

Solución: Sean x_i los autovectores de M correspondientes a autovalores menores que 1:

$u^1=\sum_{i=1}^n a_ix_i$

$c=\sum_{i=1}^n c_ix_i$

Realizando iteraciones obtenemos las siguientes expresiones:

$u^2 = Mu^1+c$

$u^3 = Mu^2+c = M\left(Mu^1+c\right)+c = M^2u^1+Mc+c$

$\vdots$

$u^n = M^{n-1}u^1+M^{n-2}c+\ldots Mc+c =$

$\quad = M^{n-1}u^1+\left(M^{n-2}+\ldots M+1\right)c$

Tomando el primer sumando:

$M^{n-1}u^1 = M^{n-1}\sum_{i=1}^n a_ix_i = M^{n-2}\sum_{i=1}^n a_iMx_i =$

$\quad = M^{n-2}\sum_{i=1}^n a_i\lambda_ix_i = \ldots\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^{n-1}x_i$

Como u^1 depende linealmente de los x_i (autovectores) cuyos autovalores λ_i son menores que uno, entonces λ_i^{n-1} tiende a 0 cuando n tiende a infinito, luego este término converge.

Para el segundo sumando:

$\left(M^{n-2}+\ldots M+1\right)c =$

$\quad = \left(M^{n-2}+\ldots M+1\right)\sum_{i=1}^n c_ix_i =$

$\quad = M^{n-2}\sum_{i=1}^n c_ix_i+\ldots M\sum_{i=1}^n c_ix_i+$

$\quad + \sum_{i=1}^n c_ix_i = \sum_{i=1}^n c_i\lambda_i^{n-2}x_i+$

$\quad + \ldots\sum_{i=1}^n c_i\lambda_ix_i+\sum_{i=1}^n c_ix_i =$

$\quad = \sum_{i=1}^n c_ix_i\,\underbrace{\left(\lambda_i^{n-2}+\ldots+\lambda_i+1\right)}_{\text{Serie geométrica convergente}} \le$

$\quad \le \sum_{i=1}^n c_ix_i\frac{1}{1-\lambda_i}$,

con lo que este término también converge.

Problema 102 *Calcular 2 iteraciones del método de Newton-Raphson no-lineal para aproximar una raíz del sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x^2+y^2-1&=0 \\ y-x&=0 \end{aligned}$$

partiendo de $(x,y)=(1,1)$.

Solución:

$$\left\{\begin{aligned} x^2+y^2-1=0 \\ y-x=0 \end{aligned}\right. \left\{\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$u^n = (x^n, y^n)$

$u^0 = (1,1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(u^n) z = -f(u^n) \\ u^{n+1} = u^n + z \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ y-x \end{pmatrix}$$

Iteraciones:

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$u^1 = u^0 + z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

$$u^2 = u^1 + z = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

$$u^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} \\ \frac{17}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .708\,33 \\ .708\,33 \end{pmatrix}$$

Problema 103 *Plantear el algoritmo necesario para calcular, utilizando el método de Newton-Raphson, las raíces complejas o reales de un polinomio de grado* 3.

Solución:

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

Un polinomio de grado 3 posee al menos una raíz real. Las otras dos raíces pueden ser también reales o imaginarias conjugadas.

Sea z un número complejo: $z = x + yi$, sustituyendo en la anterior ecuación,

$$P(x+yi) = a(x+yi)^3 + b(x+yi)^2 + c(x+yi) + d$$

$$P(x+yi) = ax^3 + 3iax^2y - 3axy^2 - iay^3 +$$
$$+bx^2 + 2ibxy - by^2 + cx + icy + d = 0$$

Separamos la parte real de la parte imaginaria:

$$f = \left\{ \begin{array}{l} ax^3 - 3axy^2 + bx^2 - by^2 + cx + d = 0 \\ 3ax^2y - ay^3 + 2bxy + cy = 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3ax^2 - 3ay^2 + 2bx + c & -6axy - 2by \\ 6axy + 2by & 3ax^2 - 3ay^2 + 2bx + c \end{pmatrix}$$

El proceso iterativo es de la forma:

$u^n = (x_n, y_n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(u^n) \cdot z = -f(u^n) \\ u^{n+1} = u^n + z \end{array} \right.$$

Algoritmo:

Este algoritmo utiliza una función, "$Sistema(A,u)$", para resolver un sistema de ecuaciones.

Las funciones $F(u)$ y $\nabla F(u)$ se utilizan para evaluar la función y el gradiente de la función en un punto, respectivamente.

```
Funcion F(u)
    f(1) = a·u(1)^3 − 3a·u(1)·u(2)^2+
        +b·u(1)^2 − b·u(2)^2 + c·u(1) + d
    f(2) = 3a·u(1)^2·u(2) − a·u(2)^3+
        +2b·u(1)·u(2) + c·u(2)
    devolver f
Fin funcion

Funcion ∇F(u)
    ∇f(1,1) = 3a·u(1)^2 − 3a·u(2)^2 + 2b·u(1) + c
    ∇f(1,2) = −6a·u(1)·u(2) − 2b·u(2)
    ∇f(2,1) = −∇f(1,2)
    ∇f(2,2) = ∇f(1,1)
    devolver ∇f
Fin funcion

Algoritmo
    u^(n−1) = (x0, y0)
    /* calculamos la primera aproximación */
    z = Sistema(∇F(u^(n−1)), −F(u^(n−1)))
    u^n(1) = u^(n−1)(1) + z(1)
    u^n(2) = u^(n−1)(2) + z(2)
    n = 0
    Mientras (|u^n − u^(n−1)| ≥ TOL) y (n < TOP)
        u^(n−1) = u^n
        /* calculamos la siguiente aproximación */
        z = Sistema(∇F(u^(n−1)), −F(u^(n−1)))
        u^n(1) = u^(n−1)(1) + z(1)
        u^n(2) = u^(n−1)(2) + z(2)
        n = n + 1
    Fin Mientras
    Si (n = TOP) Entonces
        ERROR: No se ha encontrado solución
    Fin Si
Fin Algoritmo
```

Problema 104 *Se considera el sistema no-lineal*

$$(x-1)y = 0$$
$$(y-2)x = 0$$

A partir de $u^1 = (1,1)$, calcular u^2 y u^3 utilizando el método de Newton-Raphson para aproximar un cero del sistema no-lineal.

Solución:

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ y-2 & x \end{pmatrix} \to \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to u^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to u^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Problema 105 *Calcular 1 iteración del método de Newton-Raphson no-lineal para aproximar una raíz del sistema de ecuaciones*

$$e^{xyz} - 1 = 0$$
$$y^2 - z^3 - 2 = 0$$
$$(z-1)x^4 - 3 = 0$$

partiendo de $(x,y,z) = (1,1,1)$.

Solución:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 0 & 2y & -3z^2 \\ 4(z-1)x^3 & 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)\, z = -f(x,y,z) \\ u^{n+1} = u^n + z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 0 & 2y & -3z^2 \\ 4(z-1)x^3 & 0 & x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} e^{xyz} - 1 \\ y^2 - z^3 - 2 \\ (z-1)x^4 - 3 \end{pmatrix}$$

Iteración:

$$\begin{pmatrix} e & e & e \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e-1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e}(e-1) - \frac{17}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u^{n+1} = u^n + z =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{e}(e-1) - \frac{17}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} - \frac{1}{e}(e-1) \\ \frac{13}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

INTERPOLACION DE FUNCIONES II

Problema 106 *Calcular los polinomios base de Hermite que corresponden a tomar como puntos de interpolación $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, y el orden de derivación $M = 1$.*

Solución: Los polinomios de Hermite que corresponden a esos puntos de interpolación vienen dados por las gráficas 4, 5, 6 y 7.

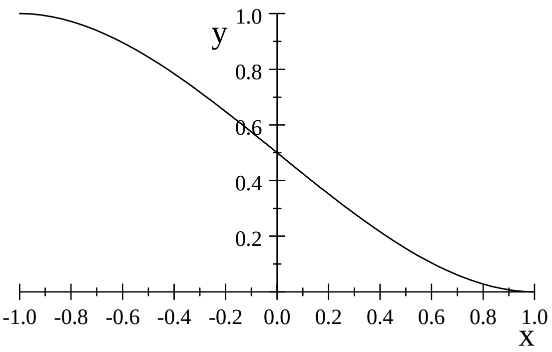


Figure 4: Polinomio de Hermite H^0_{-1}

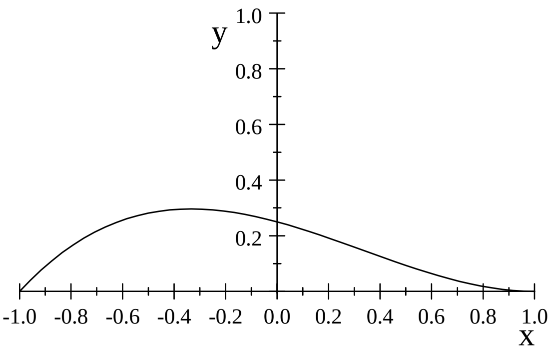


Figure 5: Polinomio de Hermite H^1_{-1}

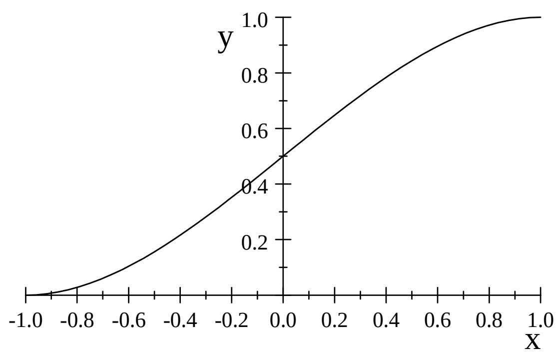


Figure 6: Polinomio de Hermite H_1^0

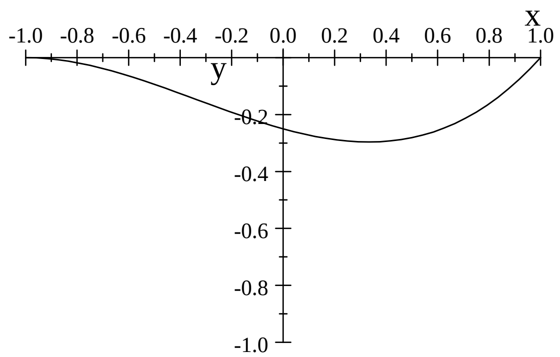


Figure 7: Polinomio de Hermite H_1^1

1. La gráfica 4 se hace cero en 1 y sus derivadas, tanto en ese punto como en -1, valen cero. Este polinomio tiene dos raíces en 1 (la segunda debido al valor de su derivada en 1), con lo que la forma de este polinomio es como sigue:

   $H^0_{-1}(x) = (x-1)^2 (a(x+1)+b)$

   El valor de este polinomio en -1 es 1:

   $H^0_{-1}(-1) = 1$

   $(-1-1)^2 (a(-1+1)+b) = 4b = 1$

   $b = \frac{1}{4}$

   Al ser la derivada en -1 igual a cero tenemos:

   $H^{0\prime}_{-1}(x) = 2(x-1)(a(x+1)+b) + (x-1)^2 a = 0$

   $H^{0\prime}_{-1}(x) = 2(-2)(a(0)+b) + (-2)^2 a = 0$

   $-4b + 4a = 0$

   $a = b = \frac{1}{4}$,

   luego el polinomio queda,

   $$\boxed{H^0_{-1}(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 (x+2)}$$

2. Para calcular el segundo polinomio partimos de la gráfica 5. En ésta, La función se anula en -1 y 1, la derivada en -1 es igual a 1 y su derivada en 1 es cero. Por la misma razón que en el caso anterior, sabemos que la función posee dos raíces en 1, con lo que el polinomio tiene la forma,

   $H^1_{-1}(x) = (x-1)^2 (a(x+1)+b)$

   $H^1_{-1}(-1) = (-1-1)^2 (a(-1+1)+b) = 4b = 0$

   $b = 0$

   para calcular el valor de a, derivamos el polinomio y evaluamos en 1,

   $H^{1\prime}_{-1}(x) = 2(x-1)(a(x+1)+b) + (x-1)^2 a$

   $H^{1\prime}_{-1}(-1) = 2(-1-1)(a(-1+1)+b) +$

   $\quad + (-1-1)^2 a = 1$

   $4a = 1$

   $a = \frac{1}{4}$,

   luego el polinomio nos queda:

   $$\boxed{H^1_{-1}(x) = (x-1)^2 \left(\frac{1}{4}(x+1)\right)}$$

3. Para calcular los otros dos polinomios, basta considerar que son funciones simétricas a las dos anteriores. En la gráfica 6 se puede ver que esta función es simétrica a $H^0_{-1}(x)$ (ver gráfica 4) con respecto al eje de las y.

   El polinomio es por tanto,

   $H^0_1(x) = H^0_{-1}(-x)$

   $H^0_1(x) = \frac{1}{4}(-x-1)^2 (-x+2)$

   $$\boxed{H^0_1(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 (x-2)}$$

4. Por último, la función representada en la gráfica 7, es simétrica al polinomio H_{-1}^1 (gráfica 5) con respecto al origen, con lo que,

   $H_1^1(x) = -H_{-1}^1(-x)$

   $H_1^1(x) = -\left(-x-1\right)^2 \left(\frac{1}{4}\left(-x+1\right)\right)$

   $$\boxed{H_1^1(x) = \frac{1}{4}\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)}$$

Problema 107 *Calcular los polinomios que determinan la interpolación por splines cúbicos de la función* $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ *para los puntos* $x = -1, 0, 1, 2$

Solución: Los polinomios son de la forma:

$P(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$

Vamos a calcular los coeficientes para cada intervalo:

$h_i = 1 \qquad \forall \left(x_i - x_{i-1}\right)$

$a_i = f\left(x_i\right) \qquad i = 0, \ldots N$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(x_0\right) \\ f\left(x_1\right) \\ f\left(x_2\right) \\ f\left(x_3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h_{i-1}c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right)c_i + h_i c_{i+1} =$

$= \frac{3(a_{i+1}-a_i)}{h_i} - \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$

$c_0 = c_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad i = 0, \ldots N-1$

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{2}{5}}{3} \\ \frac{\frac{-8}{5} - \frac{2}{5}}{3} \\ \frac{\frac{8}{5}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{15} \end{pmatrix}$$

$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i(2c_i + c_{i+1})}{3} \qquad i = 0, \ldots N-1$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{15} \\ 1 - \frac{\frac{4}{5} - \frac{8}{5}}{3} \\ -1 + \frac{16}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{15} \\ \frac{19}{15} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Los splines cúbicos nos quedan de la siguiente manera:

$P_1(x) = \frac{2}{15}\left(x+1\right)^3 + \frac{13}{15}\left(x+1\right) - 1$

$x \in [-1, 0]$

$P_2(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{19}{15}x$

$x \in [0, 1]$

$P_3(x) = \frac{8}{15}\left(x-1\right)^3 - \frac{8}{5}\left(x-1\right)^2 + \frac{1}{15}\left(x-1\right) + 1$

$x \in [1, 2]$

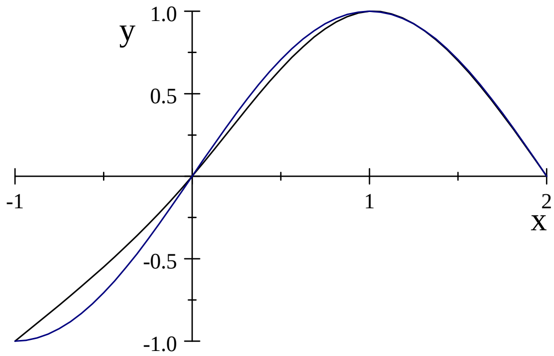


Figure 8: Comparación entre la función $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y su aproximación por splines cúbicos.

Problema 108 *Calcular la función que interpola, utilizando la función sinc(x) a la función* $f(x) = \sin(x)$ *en los puntos* $x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Solución:

$sinc\left(x\right) = \frac{\sin(x)}{x}$

La interpolación a través de la función $sinc(x)$:

$\tilde{f}(x) \approx \sum_{i=M}^{N} f(x_i) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{x}{a} - i\right)\right)}{\pi\left(\frac{x}{a} - i\right)}$

$x_i = a \cdot i = \frac{\pi}{2}\left[-2, -1, 0, 1, 2\right]$

$\tilde{f}(x) \approx f\left(-\pi\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)\right)}{\pi\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)} + f\left(\frac{-\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{2x}{\pi}+1\right)\right)}{\pi\left(\frac{2x}{\pi}+1\right)} +$

$+ f\left(0\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{2x}{\pi}\right)\right)}{\pi\left(\frac{2x}{\pi}\right)} + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)\right)}{\pi\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)} +$

$+ f\left(\pi\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{2x}{\pi}-2\right)\right)}{\pi\left(\frac{2x}{\pi}-2\right)} = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \frac{\sin(2x+\pi)}{2x+\pi} +$

$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(2x-\pi)}{2x-\pi} = \frac{\sin(2x-\pi)}{2x-\pi} - \frac{\sin(2x+\pi)}{2x+\pi} =$

$= \frac{\sin 2x}{2x+\pi} - \frac{\sin 2x}{2x-\pi} = \frac{\sin 2x(2x-\pi) - \sin 2x(2x+\pi)}{4x^2-\pi^2} =$

$= -2\pi \frac{\sin 2x}{4x^2-\pi^2}$

En la figura 9 se muestran el $\sin(x)$ y su aproximación por el seno cardinal

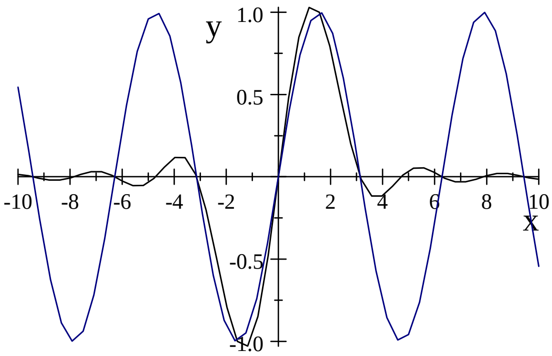


Figure 9: Comparación del $\sin x$ con su aproximación numérica utilizando $\sin c(x)$, tomando como puntos de interpolación x=$-\pi$, $\frac{-\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π.

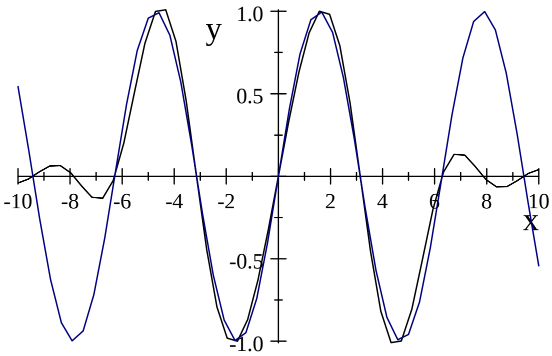


Figure 10: Comparación del $\sin x$ con su aproximación numérica utilizando $\sin c(x)$, tomando como puntos de interpolación x=-2π, $\frac{-3\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{-\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π

Problema 109 *Calcular el polinomio trigonométrico tomando $N = 2$, que interpola a la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.*

Solución:

$$|x| = \begin{cases} -x & si \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

La interpolación por polinomios trigonométricos tiene la forma:

$$\tilde{f}(x) \approx \sum_{k=-2}^{2} c_k e^{ikx},$$

donde los coeficientes se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$c_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx}{2\pi} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{ikx} dx}{2\pi} =$$

$$= \frac{-\int_{-\pi}^{0} x e^{ikx} dx}{2\pi} + \frac{\int_{0}^{\pi} x e^{ikx} dx}{2\pi}$$

Los valores de estos coeficientes son:

$$c_2 = c_{-2} = 0$$
$$c_1 = c_{-1} = \tfrac{-2}{\pi}$$
$$c_0 = \tfrac{\pi}{2}$$

Sustituimos en el sumatorio que aproxima a la función y obtenemos:

$$\tilde{f}(x) \approx \tfrac{-2}{\pi} e^{-ix} + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2}{\pi} e^{ix} =$$

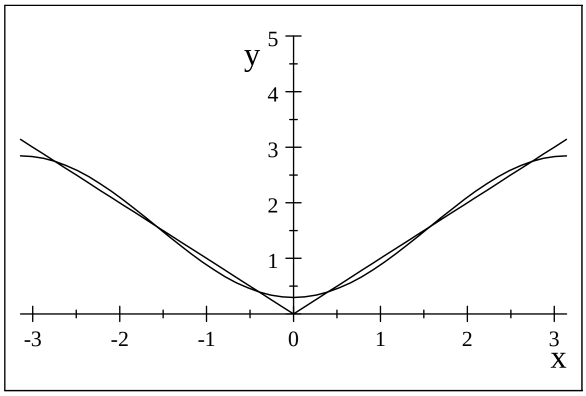
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{4}{\pi}\cos x$$

El resultado de la aproximación es, por tanto,

$$\tilde{f}(x) \approx \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\cos x$$

La siguiente gráfica compara $f(x) = |x|$ con su aproximación $\tilde{f}(x)$ para $N = 2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

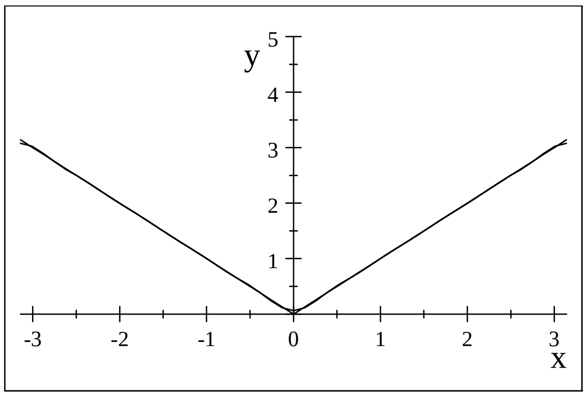
$|x|$



Polinomio trigonométrico ($N = 2$, $[-\pi, \pi]$)

En la siguiente gráfica se realiza la misma comparación tomando 20 muestras en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$|x|$



Polinomio trigonométrico ($N = 10$, $[-\pi, \pi]$)

Problema 110 *Calcular la aproximación mínimo cuadrática lineal de la tabla*

x_i	y_i
0	0
1	1
2	0
3	2

Solución: Aplicando las fórmulas para calcular los coeficientes de la recta que más se aproxima a estos puntos, obtenemos:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{4(1+6)-(1+2+3)(1+2)}{4(1+2^2+3^2)-(1+2+3)^2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1+2^2+3^2\right)(1+2)-(1+6)(1+2+3)}{4(1+2^2+3^2)-(1+2+3)^2} = 0$$

$$P(x) = ax + b = \frac{1}{2}x$$

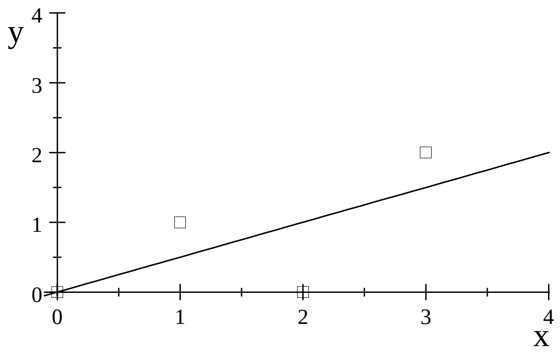


Figure 11: Aproximación mínimo cuadrática